SERIE DI FOURIER

E

ALTRE RAPPRESENTAZIONI ANALITICHE

DELLE

FUNZIONI DI UNA VARIABILE REALE

SERIE DI FOURIER

E

ALTRE RAPPRESENTAZIONI ANALITICHE

DELLE

FUNZIONI DI UNA VARIABILE REALE

PER

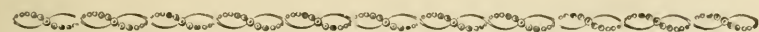
ULISSE DINI

PROFESSORE ORDINARIO NELLA R. UNIVERSITÀ DI PISA

PISA

TIPOGRAFIA T. NISTRI E C.

—

1880

Le questioni intorno agli sviluppi delle funzioni di una variabile reale data arbitrariamente in un certo intervallo, hanno formato soggetto degli studî dei più celebri geometri, segnatamente da una cinquantina d' anni a questa parte.

Pubblicare un libro che riunisse i principali fra questi studî, insieme a quel poco che avessi potuto aggiungervi di mio, e dare così un seguito al libro già pubblicato col titolo „ Fondamenti per la teorica delle funzioni di una variabile reale „ fu dapprima il mio intendimento.

Questo concetto però si è andato man mano slargando, specialmente perchè, rinvenuto un processo generale, ho potuto dedurre con metodo uniforme gli

sviluppi conosciuti fin ora ed altri nuovi o non per anco completamente dimostrati, dandoli, a mio credere, in un modo pienamente rigoroso; e così il libro, che secondo i miei primi intendimenti avrebbe dovuto presentarsi al pubblico sotto le più modeste apparenze, viene ora a prendere una mole alquanto considerevole. Ho reputato opportuno perciò il dividere il libro stesso in due parti; dando nella prima tutto quello che si riferisce alla possibilità degli sviluppi, e riunendo nella seconda quello che si riferisce alle proprietà degli sviluppi medesimi, come ad es. alla loro convergenza in ugual grado, alla loro integrabilità o differenziabilità termine a termine, alla unicità ec...

Non entrerò in dettagli nè per ciò che riguarda la prima, nè per ciò che riguarda la seconda parte.

Dirò solo che nei metodi seguiti ho sempre cercato di conservare la maggior generalità possibile; ed è per questo appunto che i varii risultati li ho potuti ottenere colla più grande semplicità, e senza bisogno di lunghi calcoli, e ho potuto trovare altresì che la maggior parte dei risultati medesimi, che fin ora erano stati dati con processi speciali e calcoli assai laboriosi pel caso soltanto degli sviluppi di Fourier, valgono anche per altre classi estesissime di sviluppi. Il vantaggio di quei metodi poi, oltre che nel loro carattere generale, sta anche nella circostanza che in essi le difficoltà tro-

vansi separate in due; l'una cioè relativa alla funzione da svilupparsi, e l'altra relativa soltanto alla natura dello sviluppo. In tal modo per es. volendo riconoscere se un certo sviluppo è possibile, s'incomincia sempre dal fare alcune verificazioni sugli sviluppi di quella forma indipendentemente dalla funzione da svilupparsi; e dopo di aver fatto queste verificazioni, i teoremi generali del Cap. III nei quali si ha riguardo soltanto alla natura della funzione negli intorni dei punti nei quali vuole svilupparsi, danno subito alcune classi di funzioni alle quali lo sviluppo è applicabile. Fra queste funzioni si trovano sempre quelle che negli stessi intorni non fanno oscillazioni, e nella maggior parte dei casi vi si trovano anche alcune classi estesissime di funzioni con infiniti massimi e minimi.

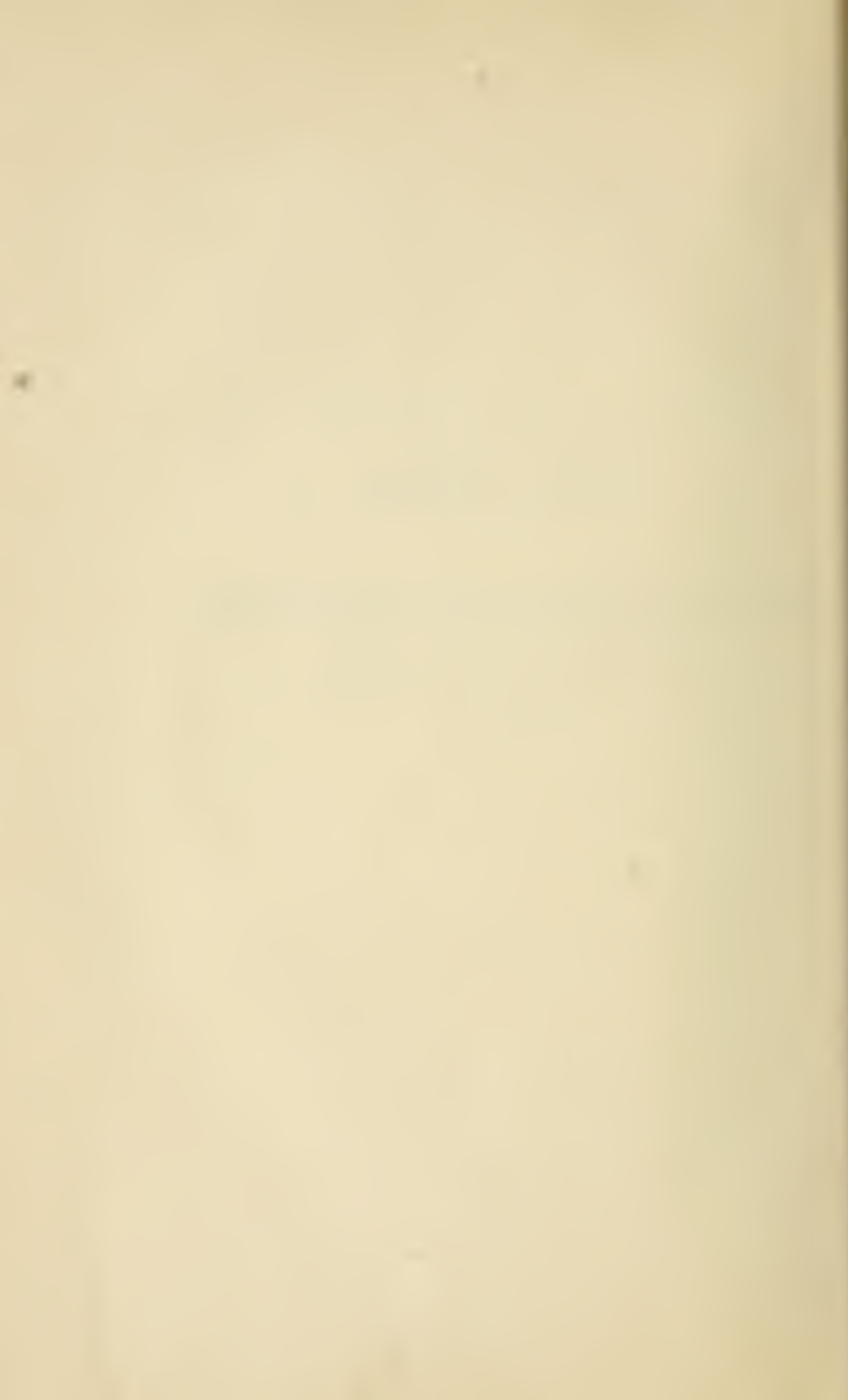
Di fronte però al vantaggio che porta seco la generalità che ho mantenuta, si ha l'inconveniente che gli enunciati di alcuni teoremi vengono forse troppo prolissi, e talvolta occorre entrare in considerazioni alquanto minuziose; ma tali inconvenienti mi sembrano ben compensati dai vantaggi che per altri lati se ne hanno, e dalla importanza dei risultati che se ne ottengono.

Questo libro presenta certamente dei difetti, alcuni dei quali però sono più specialmente da attribuirsi alla circostanza che la sua pubblicazione si è fatta a inter-

valli, e con concetti che, come già ho detto, si andavano soltanto a poco a poco svolgendo. Voglio ciò non ostante sperare che i cultori della scienza non lo troveranno del tutto privo di un qualche valore; e ad ogni modo sarò lieto se, per l' insieme dei risultati che in esso trovansi riuniti, contribuirà ad agevolare lo studio di una delle parti più belle dell' Analisi moderna.

Pisa, Ottobre 1880.

PARTE PRIMA

POSSIBILITÀ DELLE RAPPRESENTAZIONI ANALITICHE PER LE FUNZIONI DATE ARBITRARIAMENTE IN UN CERTO INTERVALLO

I. Considerazioni generali.

1. Uno dei problemi più interessanti dell'analisi è quello di cercare se e in quali casi le funzioni di una variabile reale date arbitrariamente in un certo intervallo finito o infinito (a,b) possono esprimersi analiticamente per ogni valore di x fra a e b, per modo cioè che i valori della funzione data per questi valori di x possano tutti ottenersi per mezzo di una serie finita o infinita di operazioni di calcolo da farsi sulla variabile.

Però un problema posto in una maniera così generale non potrebbe risolversi, o almeno difficilmente potrebbe aversi un metodo per trattarlo, ove non si stabilisse qualche cosa intorno alla natura della espressione analitica che, quando la cosa sia possibile, dovrà rappresentare la funzione; ed è perciò che nelle ricerche di questo genere che finora sono state fatte si è sempre limitato il problema stesso cercando soltanto se ed in quali casi una funzione data arbitrariamente in un certo intervallo può avere una espressione analitica di forma data.

I risultati che così si sono ottenuti possono dirsi di una straordinaria importanza, non tanto per l'Analisi, quanto, e più specialmente, per le loro applicazioni alla Fisica matematica; e noi ne esporremo alcuni dei principali, avendo però più particolarmente in mira la rappresentazione analitica delle funzioni di una variabile reale per mezzo di serie convergenti formate con date funzioni speciali della variabile, o per mezzo di certi integrali definiti.

2. Il problema generale della rappresentazione analitica delle funzioni di una variabile reale data arbitrariamente in un certo intervallo, sarebbe sorto naturalmente dopo la introduzione che Dirichlet fece nella scienza del suo concetto di funzione (*). Limitato però alla rappresentazione delle funzioni per mezzo di serie trigonometriche, questo problema può dirsi ormai vecchio e celebre nella storia della scienza; e può dirsi anzi che per esso appunto Dirichlet sia stato condotto alla sua definizione generale della parola *funzione*.

Questo problema infatti si è presentato per la prima volta verso la metà del secolo scorso nel trattare una questione di Fisica matematica, quella cioè delle corde vibranti.

Con alcune supposizioni prossime alla realtà, era stato trovato che la forma di una corda che vibra in un piano, alla fine del tempo t è data dalla equazione a derivate parziali:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \tag{1}$$

ove α è una costante, e x e y sono le coordinate ortogonali situate nel detto piano coll'origine in uno degli estremi della corda, e l'asse delle x disposto secondo la retta (orizzontale) che passa per gli estremi della corda stessa.

D'Alembert prendendo a studiare questo problema delle corde vibranti, trovò pel primo che la soluzione generale della equazione (1) era data dalla formola:

$$y = f(x+\alpha t) + \varphi(x-\alpha t),$$

ove f e φ sono due funzioni arbitrarie; e poi osservando che, se l è la lunghezza della corda nella posizione di equilibrio, y doveva essere zero per qualunque valore di t ai punti estremi $x=0$, $x=l$ della corda, ne dedusse che le funzioni f e φ dovevano soddisfare alle equazioni:

(*) Avanti Dirichlet, per es. da Monge, si era definita la parola funzione in un modo quasi così generale come quello di Dirichlet; però allora vi era sempre espresso o sottinteso il concetto della esistenza di una data espressione analitica per la funzione medesima.

$$f(\alpha t) = -\varphi(-\alpha t), \qquad f(l+\alpha t) = -\varphi(l-\alpha t),$$

le quali cambiando αt in z davano:

$$f(z) = -\varphi(-z) = -\varphi(l-(l+z)) = f(2l+z),$$

per modo che si poteva concludere che la soluzione generale del problema delle corde vibranti era contenuta nella equazione:

$$y=f(\alpha t+x) - f(\alpha t-x),$$

ove f è il simbolo di una funzione arbitraria per la quale si ha $f(z)=f(2l+z)$.

Dopo D'Alembert, anche Eulero prese a trattare il problema di cui parliamo, e trovò che la funzione f, e quindi le vibrazioni della corda restavano pienamente determinate, quando era data la forma della corda e la velocità di ognuno dei suoi punti (cioè y e $\frac{\partial y}{\partial t}$), e così venne a completare la soluzione del D'Alembert.

La memoria di Eulero diede occasione ad un altra di D'Alembert nella quale egli mosse alcune obiezioni contro la estensione fatta da Eulero del suo metodo; e dopo questa ne comparve una di Daniele Bernoulli nella quale venne data una nuova soluzione del problema fondata sopra una osservazione fatta qualche tempo prima da Taylor.

Taylor aveva osservato che la funzione:

$$y = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi t\alpha}{l},$$

con n intero qualunque soddisfaceva alla equazione (1), e alle condizioni $y=0$ per $x=0$ e $x=l$ qualunque sia t, e aveva spiegato così il fatto fisico che una corda, oltre il suono fondamentale che gli è proprio, può dare anche il suono fondamentale di una corda della stessa costituzione e di una lunghezza $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ .... della sua; Bernoulli guidato da questa osservazione, e dall' altra che una corda poteva dare anche contemporaneamente questi suoni, ne dedusse che essa avrebbe potuto vibrare anche conformemente alla equazione:

$$(2) \qquad y = \Sigma a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi\alpha(t - b_n)}{l},$$

ove le a_n e b_n sono costanti arbitrarie; e poi avendo riconosciuto che con questa formola qualsiasi fenomeno del suono veniva spiegato, ne concluse che essa doveva essere la formola generale.

Dopo questo lavoro di Bernoulli ne comparve un altro di Eulero nel quale questo celebre matematico rispondeva alle obiezioni fattegli da D'Alembert, e osservava contro Bernoulli che, siccome per ogni valore del tempo t la formola (2) dava la equazione della corda sotto la forma:

$$(3) \qquad y = \Sigma \alpha_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l},$$

bisognava concluderne che la detta formola (2) non somministrava la soluzione generale del problema, in quantochè, almeno per un dato istante la forma della corda poteva darsi arbitrariamente, e non era dimostrato che una curva qualunque data arbitrariamente fra due ascisse 0 e l potesse sempre rappresentarsi con una equazione della forma (3); e anzi si riteneva allora come impossibile di rappresentare una curva algebrica, o più generalmente una curva analitica data e non periodica, per mezzo di una espressione periodica come quella scritta sopra o anche come l'altra:

$$(4) \qquad y = \Sigma \alpha_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} + \Sigma \beta_n \cos \frac{n\pi x}{l}.$$

Il problema era portato a questo punto, e incidentalmente aveva dunque fatto nascere la questione se una curva data arbitrariamente fra 0 e l potesse o nò rappresentarsi sempre con una equazione della forma (3) o (4), per quanto, ritenendosi allora la cosa del tutto impossibile, una tal questione venisse posta immediatamente da parte; nè ancora le questioni sorte fra Eulero, D'Alembert, e Bernoulli potevano dirsi decise, ma soltanto Eulero e D'Alembert si trovavano d'accordo nel ritenere che la soluzione del Bernoulli non fosse la soluzione generale del problema delle corde vibranti.

Fu allora che Lagrange, ancor giovanissimo, prese a studiare egli pure il problema, e ne dette una soluzione in un modo tutto nuovo, quantunque non altrettanto rigoroso. In questo lavoro egli ebbe occasione di dare la formola che esprime per una serie *finita* di funzioni circolari la ordinata di una curva che passa per un numero *finito* di punti disposti comunque su rette equidistanti parallele all' asse delle y; ma per quanto, avendo usato il segno $\int$ per rappresentare quelle somme che ora rappresenteremmo con Σ, e avendo usato il segno dx per rappresentare l' intervallo finito Δx, Lagrange giungesse a una formola che col farvi $n=\infty$ concorda pienamente con quella che fu trovata più tardi per una funzione qualunque, è certo però che, avendo il Lagrange tralasciato di studiare il passaggio dal finito all' infinito, la questione della possibilità o impossibilità di rappresentare una curva data arbitrariamente in un certo intervallo con una equazione della forma (3) o (4) restò ancora insoluta. Nè l' insieme della memoria di Lagrange mostra che egli pensasse che una funzione del tutto arbitraria potesse realmente rappresentarsi con una serie di seni o con una serie di seni e coseni; ma anzi mostra piuttosto che egli intraprese il suo lavoro perchè credeva che queste funzioni arbitrarie non fossero esprimibili per una formola, e solo credeva che le serie trigonometriche potessero rappresentare ogni funzione periodica data analiticamente.

3. Dopo il lavoro di Lagrange, la questione della possibilità della rappresentazione per serie trigonometriche delle funzioni date arbitrariamente non fece alcun passo per circa un mezzo secolo; quando inaspettatamente Fourier nel 1807, più per divinazione è vero che per dimostrazione, dette la formola che porta il suo nome, e mediante la quale ogni funzione $f(x)$ data arbitrariamente fra $-\pi$ e π, sotto certe condizioni pochissimo limitative viene rappresentata analiticamente in serie trigonometrica della forma:

$$(5) \qquad f(x) = \sum_{0}^{\infty} \{ a_n \cos n\,x + b_n \operatorname{sen} n\,x \},$$

ove a_n e b_n sono coefficienti costanti che risultano determinati dalle formole:

$$(6)\quad a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx\,,\; a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx\,,\; b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\, nx\,dx,$$

per tutti i valori di n.

Per giungere alla sua serie, Fourier osservò che se $f(x)$ è la somma della serie:

$$(7)\qquad \sum_0^{\infty}\{a_n\cos nx+b_n\,\mathrm{sen}\, nx\},$$

uguagliandola a $f(x)$, e moltiplicando poi i due membri una volta per $\cos mx$ e un altra per $\mathrm{sen}\; mx$ e integrando fra $-\pi$ e π, si trova:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx=\sum_0^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{sen}\, nx\cos mx\,dx\right),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\, mx\,dx=\sum\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,\mathrm{sen}\, nx\,dx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{sen}\, nx\,\mathrm{sen}\, mx\,dx\right),$$

e quindi, avendo riguardo ai valori noti degli integrali $\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx$, $\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{sen}\, nx\cos mx\,dx$, ..., pei diversi valori di interi m e n, ne dedusse che i cofficienti della serie (7) vengono determinati appunto dalle formole (6), e ne concluse allora senz'altro che la formola (5) ove a_n e b_n erano dati dalle (6), e che egli riscontrava giusta per funzioni particolari anche discontinue, serviva a rappresentare qualunque funzione data in una maniera del tutto arbitraria pei valori di x fra $-\pi$ e π.

4. Fourier presentò il 21 Dicembre 1807 alla Accademia delle Scienze di Parigi la memoria nella quale si trovano i risultati ora indicati; e questi risultati che Lagrange contestò nel modo il più formale, trovarono ben presto applicazioni meravigliose nella fisica matematica ove numerosi esempî persuadenti ne confermavano ogni dì più la esattezza.

Astrazion fatta però anche dalla obiezione che *ora* farebbesi al processo che condusse Fourier alla sua formola, per avere egli in questo processo applicata una integrazione per serie termine a termine senza dimostrare prima la legittimità di questa operazione, è certo che il processo stesso presenta un altro difetto capitale perchè ammette a *priori* la possibilità dello sviluppo della funzione data $f(x)$ sotto la forma (7), il che è quello appunto che trattavasi di dimostrare; talchè, anche dopo la memoria di Fourier, la questione della rappresentabilità di una funzione $f(x)$ data arbitrariamente fra $-\pi$ e π per mezzo di una serie trigonometrica della forma (7), restava ancora del tutto insoluta.

5. I risultati di Fourier però gettavano gran luce sulla questione, perchè non ostante le obiezioni ora indicate, il riscontrare che essi erano giusti nei singoli casi nei quali venivano applicati faceva acquistare la presunzione della loro esattezza, se non in generale, almeno in casi estesissimi. Conveniva perciò allora ammettere come data la forma della serie trigonometrica (7), e cercare in quali casi generali la serie stessa è convergente pei vari valori di x fra $-\pi$ e π e ha per somma la funzione data $f(x)$; e questa ricerca tentata prima dal Cauchy, fu fatta poi rigorosamente la prima volta da Dirichlet in una memoria pubblicata nel Vol. IV del Giornale di Crelle ai primi dell' anno 1829.

6. Dirichlet osservò dapprima che le serie della forma (7), o le altre:

$$(8)\qquad \frac{1}{2}a_0+\sum_1^\infty(a_n\cos nx+b_n\operatorname{sen} nx),$$

ove:

$$(9)\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\ ,\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\operatorname{sen} nx\,dx\ ,$$

non sono sempre convergenti indipendentemente dall' ordine dei termini; e quindi per decidere della loro convergenza non biso-

gna riferirsi al modo secondo cui tendono a zero questi termini, ma bisogna cercare il limite verso cui converge la somma dei primi n o $n+1$ di essi quando n cresce indefinitamente, e vedere se questo limite è o nò determinato e finito; e per dimostrare poi che questa serie ha per somma $f(x)$, almeno in dati casi, bisogna anche far vedere che il detto limite è appunto $f(x)$.

Dietro questa osservazione, la questione si riduceva a cercare il limite della somma dei primi n o $n+1$ termini della serie (8); e poichè la somma di questi $n+1$ termini, quando si pongano per le a_n e b_n i loro valori (9) e si muti x in α fuori dei segni integrali, può scriversi:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{1}^{n}\cos n\,(x-\alpha)\right\} d\,x\,,$$

e per essere (*)

$$\frac{1}{2}+\sum_{1}^{n}\cos n\,(x-\alpha)=\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}(x-\alpha)}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(x-\alpha)}, \tag{10}$$

(*) La dimostrazione di questa formola si fà nel modo seguente. Si osserva che posto:

$$S=\sum_{1}^{n}\cos r\,\theta\,,$$

si ha:

$$2\,S\cos\theta=\sum_{1}^{n}2\cos\theta\cos r\,\theta=\sum_{1}^{n}\left\{\cos(r+1)\,\theta+\cos(r-1)\,\theta\right\}=$$

$$=2\sum_{1}^{n}\cos r\,\theta+\cos(n+1)\,\theta-\cos n\,\theta+1-\cos\theta\,,$$

ovvero:

$$2\left(S+\frac{1}{2}\right)(1-\cos\theta)=2\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}\theta\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\,,$$

da cui:

$$\frac{1}{2}+\sum_{1}^{n}\cos r\,\theta=\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}\theta}{2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}\,.$$

si riduce all' integrale:

$$(11) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}(x-\alpha)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(x-\alpha)} dx,$$

il problema venne così ridotto alla ricerca del limite di questo integrale per $n=\infty$; e cercando allora effettivamente questo limite, Dirichlet giunse a dimostrare rigorosamente che una funzione $f(x)$ di x che è data arbitrariamente fra $-\pi$ e π, e che in questo intervallo è sempre finita e non ha un numero infinito di massimi e minimi, per tutti i valori di x compresi fra gli stessi limiti pei quali è continua può rappresentarsi per mezzo della serie (8); e pei valori di x interni all' intervallo $(-\pi, \pi)$ pei quali la funzione stessa è discontinua (le discontinuità venendo allora ad essere discontinuità ordinarie) (*), la serie (8) dà il valore medio fra i due verso cui tende la funzione quando ci si avvicina indefinitamente a quel valore di x dalle due parti di esso; vale a dire se a è un punto interno all' intervallo ($-\pi$ e π) nel quale la funzione è continua o discontinua la somma della serie per $x=a$ può sempre rappresentarsi con $\frac{1}{2}\{f(a+0)+f(a-0)\}$; mentre pei punti estremi $\pm\pi$ la somma della serie è $\frac{1}{2}\{f(\pi+0)+f(\pi-0)\}$.

7. Dirichlet fece inoltre una estensione del suo teorema considerando anche alcune classi di funzioni che divenivano infinite in alcuni punti fra $-\pi$ e π, e che, avendo soltanto un numero finito di massimi e minimi, non potevano naturalmente essere infinite altro che in un numero finito di punti; e in fine della sua memoria aggiunse (senza però neppure accennare alla dimostrazione) che il teorema stesso sarebbe stato applicabile a tutte le funzioni, anche dotate di un numero

(*) V. per es. il mio libro *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali* al §. 187. 6.° In ciò che segue le citazioni a questo libro saranno indicate col segno [m. l.].

infinito di massimi e minimi, per le quali gli integrali che compariscono nelle espressioni dei coefficienti a_n e b_n hanno un significato (nel senso inteso da lui); includendo così fra le funzioni rappresentabili per tutti i valori di x fra $-\pi$ e π mediante la serie (8) tutte le funzioni finite e continue.

Quest' ultima asserzione di Dirichlet è stata trovata ora inesatta dal sig. Du Bois-Reymond; però i lavori di Riemann, quelli di Lipschitz (negli ultimi dei quali l' asserzione di Dirichlet fu per la prima volta messa in dubbio), e quelli di Du Bois-Reymond e di altri hanno aggiunto alle funzioni con un numero finito di massimi e minimi per le quali Dirichlet dimostra rigorosamente il suo teorema altre classi estesissime di funzioni continue e discontinue con un numero infinito di massimi e minimi, al punto da potere asserire che, almeno nello stato attuale della scienza, finchè la si riguardi nelle sue applicazioni ai fenomeni naturali, la formola di Fourier è applicabile in casi anche ben al di là di quelli che occorre di considerare.

8. Noi esporremo i principali fra i risultati che sono stati ottenuti, per gli sviluppi in serie di Fourier e per altri; e per questo dovremo prendere a studiare gli integrali della forma

$\int_0^b f(x) \frac{\operatorname{sen} h x}{\operatorname{sen} x} d x$, $\int_a^b f(x) \frac{\operatorname{sen} h x}{\operatorname{sen} x} d x$ con $0 < a < b \leq \frac{\pi}{2}$ dai

quali, come vedremo, vengono a dipendere gli integrali (11) che conducono alla somma della serie di Fourier (8), e dovremo studiarne anche altri più generali; però, onde procedere con ordine, noi premetteremo alcuni teoremi sugli integrali della

forma $\int_a^b f(x)\, \varphi(x)\, dx$, che, potendo essere utili anche in altre

teorie, saranno da noi esposti con maggiore generalità di quella che quì sarebbe necessaria, e ne esporremo alcuni sugli integrali

$\int_0^b \frac{\operatorname{sen} h x}{\operatorname{sen} x} d x$, $\int_a^b \frac{\operatorname{sen} h x}{\operatorname{sen} x} d x$ cui si riducono i precedenti

nel caso particolare di $f(x)=1$.

II. Teoremi preliminari di Calcolo Integrale.

9. Consideriamo l'integrale $\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx$ ove a e b sono numeri qualunque finiti o infiniti, e $f(x)$ e $\varphi(x)$ sono funzioni atte alla integrazione fra a e b, una delle quali per es. $f(x)$ è sempre finita, e l'altra può anche essere infinita in un gruppo finito o infinito di punti di prima specie fra a e b, ma in modo però che anche il prodotto $f(x)\varphi(x)$ sia atto alla integrazione fra a e b.

Supponendo allora dapprima che fra a e b la funzione $\varphi(x)$ sia sempre dello stesso segno, si può ricordare che si ha la formola (*m. l.* §§. 190, 230, 247):

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \overline{f}\int_a^b \varphi(x)\,dx, \tag{1}$$

ove $\overline{f}$ indica un numero compreso fra i limiti inferiore e superiore dei valori di $f(x)$ nell'intervallo (a, b) d'integrazione, per modo quindi che quando $f(x)$ è continua fra a e b (a e b incl.) $\overline{f}$ è un valore $f(\xi)$ di $f(x)$ che corrisponde a un valore ξ di x preso fra a e b (a e b incl.).

Nel caso particolare poi in cui a e b sono ambedue finiti e fra essi la funzione $\varphi(x)$ è sempre finita, allora anche se essa ha dei cambiamenti di segno fra a e b, indicando con φ_0 il limite superiore dei suoi valori assoluti o un numero maggiore, e con $\overline{f}$ e $\overline{f}'$ due numeri determinati compresi fra i limiti inferiore e superiore dei valori di $f(x)$ nell'intervallo d'integrazione, si può osservare che siccome $\varphi(x)+\varphi_0$ non è mai negativa fra a e b, la formola precedente ci darà l'altra:

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \int_a^b f(x)\{\varphi(x)+\varphi_0\}\,dx - \varphi_0\int_a^b f(x)\,dx =$$

$$= \overline{f}\int_a^b \varphi(x)\,dx + \varphi_0\overline{f}\int_a^b dx - \varphi_0\overline{f}'\int_a^b dx,$$

ovvero:

$$(2)\qquad \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f\int_a^b \varphi(x)\,dx + \theta_0\,\varphi_0\,D\,(b-a),$$

essendo θ_0 un numero compreso fra -1 e 1 (-1 e 1 inclus.), e D l'oscillazione di $f(x)$ fra a e b.

Qualunque poi sia il segno della funzione $\varphi(x)$ fra a e b, se essa è sempre finita e atta all' integrazione, e se $f(x)$ col passare di x da a a b non è mai crescente o non è mai decrescente, si ha la formola (*m. l.* §§. 213 e 262):

$$(3)\quad \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(a+0)\int_a^\xi \varphi(x)\,dx + f(b-0)\int_\xi^b \varphi(x)\,dx\,,$$

o anche:

$$(4)\quad \int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(a+0)\int_a^b \varphi(x)dx + \{f(b-0)-f(a+0)\}\int_\xi^b \varphi(x)dx,$$

ove $f(a+0)$ e $f(b-0)$ indicano i valori limiti di $f(x)$ per $x=a+0$ e $x=b-0$ che certamente hanno un significato, ξ è un numero determinato compreso fra i due numeri a e b che possono essere finiti o infiniti, e si suppone $a<b$; e queste formole valgono, come vedremo, anche nel caso in cui $\varphi(x)$ diviene infinita fra a e b restando atta all' integrazione (*).

10. Alle formole precedenti se ne possono aggiungere altre che ci torneranno poi utili.

Ammettiamo perciò, come già si fece sopra, che la funzione $f(x)$ sia sempre finita e atta all'integrazione fra i numeri finiti o infiniti a e b, e l'altra $\varphi(x)$ possa anche essere infinita ma in modo che, oltre alle funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$, anche il loro prodotto $f(x)\varphi(x)$ sia atto all'integrazione fra a e b (come per es. avviene (*m. l.* §§. 226, 245) se $\varphi(x)$ è sempre finita, o se,

(*) Nel mio libro ho attribuito le formole (3) e (4) al sig. Weierstrass, però, dietro quanto dopo ho saputo, il sig. Weierstrass le comunicò nelle sue lezioni ai suoi scolari, ma il sig. Du Bois-Reymond le pubblicò per il primo. (V. Giorn. di Borchardt Vol. 69, pag. 82).

essendo infinita, la funzione $\varphi_1(x)$ dei suoi valori assoluti è atta anch' essa alla integrazione fra a e b) (*).

Allora se per es. $a<b$, indicando con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$ $n-1$ punti presi fra a e b in modo che sia $a<\alpha_1<\alpha_2<\ldots\ldots<\alpha_{n-1}<b$, si avrà identicamente:

$$5)\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx=\{f(a)-f(\alpha_1)\}\int_a^{\alpha_1}\varphi(x)dx+\{f(\alpha_1)-f(\alpha_2)\}\int_a^{\alpha_2}\varphi(x)dx+$$

$$+\ldots+\{f(\alpha_{n-2})-f(\alpha_{n-1})\}\int_a^{\alpha_{n-1}}\varphi(x)\,dx+f(\alpha_{n-1})\int_a^b\varphi(x)\,dx+$$

$$+\int_a^{\alpha_1}\{f(x)-f(a)\}\varphi(x)\,dx+\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\{f(x)-f(\alpha_1)\}\varphi(x)\,dx+\ldots+$$

$$+\int_{\alpha_{n-1}}^b\{f(x)-f(\alpha_{n-1})\}\varphi(x)\,dx,$$

e quindi se gli integrali:

(*) Ai casi noti d' integrabilità dei prodotti $f(x)\varphi(x)$ quando ambedue le funzioni $f(x), \varphi(x)$ sono atte alla integrazione fra a e b si può aggiungere l' altro « che « le funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$ non divengano infinite insieme e che negli intorni dei punti « d' infinito dell'una di esse, per es., di $\varphi(x)$, l' altra $f(x)$ sia continua e abbia un « estremo oscillatorio λ_f finito e atto all'integrazione ». In questi intorni infatti il prodotto $f(x)\int_a^x \varphi(x)\,dx$ sarà finito e continuo, e per uno dei suoi estremi oscillatorii potrà prendersi (m. l. §. 269) la somma $\lambda_f\int_a^x \varphi(x)\,dx+f(x)\,\varphi(x)$, e questa somma sarà átta all'integrazione negli stessi intorni; quindi poichè lo stesso accade della sua prima parte $\lambda_f\int_x^x \varphi(x)\,dx$, altrettanto avverrà del prodotto $f(x)\,\varphi(x)$, come appunto volevamo mostrare. Alla condizione poi che λ_f sia finito e atto all' integraziono negli indicati intorni si può evidentemente sostituire l'altra che se λ_f è infinito esso resti atto all'integrazione anche ridotto ai suoi valori assoluti, o almeno non vi divenga infinito altro che in un numero finito di punti e l' integrale $\int_a^x \varphi(x)\,dx$ nei medesimi intorni non faccia infinite oscillazioni ec.

$$(6) \ldots \quad \int_a^{\alpha_1} \varphi(x)\,dx\,, \quad \int_a^{\alpha_2} \varphi(x)\,dx\,, \ldots \int_a^{\alpha_{n-1}} \varphi(x)\,dx\,,$$

sono sempre dello stesso segno o nulli e non vanno crescendo in valore assoluto, siccome le somme successive dei loro coefficienti sono comprese fra $f(a) - \mathrm{L}$ e $f(a) - l$ ove L e l sono i limiti superiori e inferiori di $f(x)$ fra a e b, per un noto teorema di Abel (vedi per es. m. l. §. 89) la somma dei primi $n-1$ termini del secondo membro sarà compresa fra $\{f(a) - \mathrm{L}\} \int_a^{\alpha_1} \varphi(x)\,dx$ e $\{f(a) - l\} \int_a^{\alpha_1} \varphi(x)\,dx$, e potrà quindi indicarsi con $\{f(a) - \bar{f}\} \int_a^{\alpha_1} \varphi(x)\,dx$, essendo $\bar{f}$ un numero compreso fra il limite inferiore e il limite superiore di $f(x)$ fra a e b.

Invece se gli integrali (6) sono dello stesso segno o nulli, ma non vanno decrescendo in valore assoluto, allora sempre per il teorema di Abel si vedrà che la somma dei primi $n-1$ termini del secondo membro della formola precedente è compresa fra $\{l - f(\alpha_{n-1})\} \int_a^{\alpha_{n-1}} \varphi(x)\,dx$ e $\{\mathrm{L} - f(\alpha_{n-1})\} \int_a^{\alpha_{n-1}} \varphi(x)dx$ e può quindi indicarsi con $\{\bar{f} - f(\alpha_{n-1})\} \int_a^{\alpha_{n-1}} \varphi(x)\,dx$; e si può aggiungere che in ambedue questi casi invece della somma dei primi $n-1$ integrali si potrà considerare quella dei primi n quando anche gli integrali:

$$\int_a^{\alpha_1} \varphi(x)\,dx\,, \int_a^{\alpha_2} \varphi(x)\,dx\,, \quad \ldots \quad \int_a^{\alpha_{n-1}} \varphi(x)\,dx\,, \int_a^{b} \varphi(x)\,dx$$

siano dello stesso segno o nulli e non vadano crescendo, o non vadano decrescendo, in valore assoluto, salvo in questo ultimo caso a sostituire al prodotto $\{\bar{f} - f(\alpha_{n-1})\} \int_a^{\alpha_{n-1}} \varphi(x)\,dx$ l' altro $\bar{f} \int_a^{b} \varphi(x)\,dx$.

Indicando poi con D_1, D_2, . . D_n le oscillazioni di $f(x)$ negli intervalli (a, α_1), (α_1, α_2) . . . (α_{n-1}, b), si vede chiaramente, che se $\varphi_1(x)$ è la funzione dei valori assoluti di $\varphi(x)$ fra a e b ed è atta alla integrazione in questo intervallo, la somma degli ultimi n integrali del secondo membro della (5) sarà numericamente inferiore all' altra:

$$D_1 \int_a^{\alpha_1} \varphi_1(x)\, d\,x + D_2 \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \varphi_1(x)\, d\,x + \;.\;.+ D_n \int_{\alpha_{n-1}}^{b} \varphi_1(x)\, d\,x\,;$$

e se la funzione $\varphi(x)$ sarà sempre finita fra a e b, e il limite superiore dei suoi valori assoluti sarà φ_0, la stessa somma sarà anche numericamente inferiore all' altra: $\varphi_0 \Sigma \delta_s D_s$, ove δ_1, δ_2, . . . δ_n indicano gli intervalli (a, α_1), (α_1, α_2) . . . (α_{n-1}, b); talchè indicando con θ_1, θ_2, θ_3 numeri compresi fra -1 e 1 e con D l' oscillazione totale di $f(x)$ fra a e b, resta ora dimostrato che „ quando fra a e b le funzioni $f(x)$ e „ $\varphi(x)$ sono atte alla integrazione insieme al loro prodotto $f(x)\varphi(x)$, „ e la $f(x)$ è sempre finita, indicando con α_1, α_2, . . α_{n-1} „ dei punti fra a e b presi in modo che gli integrali:

$$\int_a^{\alpha_1} \varphi(x)\, d\,x\;,\quad \int_a^{\alpha_2} \varphi(x)\, d\,x\;,\; .\;.\;.\quad \int_a^{\alpha_{n-1}} \varphi(x)\, d\,x \tag{7}$$

„ siano tutti dello stesso segno o nulli e non vadano mai crescendo o non vadano mai decrescendo in valore assoluto, si „ avranno le formole:

$$(8)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \theta_1 D\lambda_1 + f(\alpha_{n-1}) \int_a^b \varphi(x)dx + \sum \int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}} \{ f(x) - f(\alpha_s) \} \varphi(x)dx, \\ \displaystyle\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \theta_1 D\lambda_1 + f(\alpha_{n-1}) \int_a^b \varphi(x)dx + \theta_2 \sum D_s \int_{\alpha_s} \varphi_1(x)d\,x\,, \end{cases}$$

„ ove D è l'oscillazione di $f(x)$ fra a e b, λ_1 è il massimo fra „ i valori assoluti degli integrali (7), e $\varphi_1(x)$ è la funzione dei „ valori assoluti di $\varphi(x)$ fra a e b che, nel caso della seconda „ formola, si suppone atta anch'essa alla integrazione nel me-

„ desimo intervallo (a, b); e se gli integrali $\int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}} \varphi_1(x)\, dx$ sono
„ inferiori a A si avrà anche:

$$(9)\qquad \int_a^b f(x)\varphi(x)\, dx = \theta_1 D \lambda_1 + f(\alpha_{n-1}) \int_a^b \varphi(x)\, dx + \theta_3 A \sum D_s,$$

„ mentre nel caso in cui anche $\varphi(x)$ è sempre finita fra a e b
„ e φ_0 è il limite superiore dei suoi valori assoluti o un nu-
„ mero maggiore si potrà anche scrivere:

$$(10)\qquad \int_a^b f(x)\varphi(x)\, dx = \theta_1 D\lambda_1 + f(\alpha_{n-1}) \int_a^b \varphi(x)\, dx + \theta_3\, \varphi_0 \sum \delta_s D_s,$$

„ ove s'intende che il segno Σ venga esteso agli intervalli (a, α_1),
„ $(\alpha_1, \alpha_2), \ldots, (\alpha_{n-1}, b)$ che già abbiamo indicato con $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$ „.

In particolare dunque se l'integrale $\int_a^x \varphi(x)\, dx$ fra a e b ha dei massimi pos'tivi che non vanno crescendo o non vanno decrescendo, o ha dei minimi positivi pei quali si verifica la stessa particolarità, potremo prendere per $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$ questi punti di massimo o quelli di minimo rispettivamente, e applicare poi le formole precedenti; e se anche il punto b sarà uno di questi massimi o minimi dell'integrale $\int_a^x \varphi(x)\, dx$, o almeno se, nel caso che gli integrali (7) corrispondenti non vadano crescendo, si avrà $\int_a^{\alpha_{n-1}} \varphi(x)\, dx \geq \int_a^b \varphi(x)\, dx$, e nel caso che non vadano decrescendo si avrà $\int_a^{\alpha_{n-1}} \varphi(x)\, dx \leq \int_a^b \varphi(x)\, dx$, allora nelle formole precedenti il termine $f(a_{-n_1}) \int_a^b \varphi(x)\, dx$

potrà essere tralasciato; e nell' ultimo caso (quello cioè in cui gli integrali (7) non vanno decrescendo), alle stesse formole (8) e (10) si potranno sostituire le altre:

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,d\,x = \overline{f}\int_a^b \varphi(x)\,d\,x + \sum \int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}} \{f(x)-f(\alpha_s)\}\,\varphi(x)\,d\,x,$$

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,d\,x = \overline{f}\int_a^b \varphi(x)\,d\,x + \theta_3 \sum \mathrm{D}_s \int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}} \varphi_1(x)\,d\,x,$$

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,d\,x = \overline{f}\int_a^b \varphi(x)\,d\,x + \theta_3\,\varphi_0 \sum \delta_s\,\mathrm{D}_s,$$

nelle quali $\overline{f}$ indica un numero compreso fra i limiti inferiore e superiore di $f(x)$ nell'intervallo $(a\,,\,b)$.

11. Per trovare altre formole simili alle precedenti, si osservi che si ha anche identicamente:

$$
\begin{aligned}
1)\int_a^b f(x)\varphi(x)dx &= \frac{f(a)+f(\alpha_1)}{2}\int_a^{\alpha_1}\varphi(x)\,dx + \frac{f(\alpha_1)+f(\alpha_2)}{2}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\varphi(x)\,dx \\
&\quad + \dots + \frac{f(\alpha_{n-1})+f(b)}{2}\int_{\alpha_{n-1}}^{b}\varphi(x)\,d\,x + \\
&\frac{1}{2}\int_a^{\alpha_1}\{2f(x)-f(a)-f(\alpha_1)\}\,\varphi(x)dx + \frac{1}{2}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\{2f(x)-f(\alpha_1)-f(\alpha_2)\}\,\varphi(x)dx + \\
&\quad + \dots + \frac{1}{2}\int_{\alpha_{n-1}}^{b}\{2\,f(x)-f(\alpha_{n-1})-f(b)\}\,\varphi(x)\,d\,x;
\end{aligned}
$$

e questa che è analoga alla (5) ci condurrà ad altre formole notevoli.

Si supponga infatti dapprima che i punti a, α_1, , α_2 . . α_{n-1}, b siano punti di minimo e di massimo dell' integrale $\int_a^x \varphi(x)\,d\,x$, essendo α_1, α_3, α_5 . . . . massimi e a, α_2, α_4 . . . minimi, e i valori minimi corrispondenti dell' integrale stesso

non vadano decrescendo, e i massimi non vadano crescendo. Allora le quantità:

$$\int_a^{\alpha_1} f(x)\,d\,x\,,\ -\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \varphi(x)\,d\,x\,,\ \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} \varphi(x)\,d\,x\,,\ -\int_{\alpha_3}^{\alpha_4} \varphi(x)\,d\,x\,,\ldots$$

saranno positive e non crescenti, e siccome le somme:

$$\frac{f(a)+f(\alpha_1)}{2}-\frac{f(\alpha_1)+f(\alpha_2)}{2}+\frac{f(\alpha_2)+f(\alpha_3)}{2}-\ldots$$

arrestate a un termine qualunque sono comprese fra $\frac{f(a)-\mathrm{L}'}{2}$ e $\frac{f(a)+\mathrm{L}'}{2}$ essendo L' il limite superiore dei valori assoluti di $f(x)$ fra a e b, pel solito teorema di Abel si vedrà subito che la somma dei primi n termini della (11) si potrà rappresentare con $\frac{f(a)\pm\overline{f_0}}{2}\int_a^{\alpha_1}\varphi(x)\,d\,x$, essendo $\overline{f_0}$ un numero positivo che non superi il limite superiore dei valori assoluti di $f(x)$ fra a e b.

La somma poi degli ultimi n integrali della (11) potrà anche rappresentarsi come nel paragrafo precedente con $\theta_2\sum \mathrm{D}_s\int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}}\varphi_1(x)dx$, o con $\theta_3\varphi_0\Sigma\delta_s\mathrm{D}_s$, supposto in quest'ultimo caso che $\varphi(x)$ sia sempre finita e φ_0 sia il limite superiore dei valori assoluti di $\varphi(x)$ fra a e b, o un numero maggiore; quindi possiamo ora asserire che „ se a, α_1, α_2 ... α_{n-1}, b sono „ alternativamente punti di minimo e di massimo dei valori „ dell'integrale $\int_a^x \varphi(x)\,dx$, e i massimi non vanno crescendo, „ mentre i minimi invece non vanno decrescendo, si avranno „ le formole:

$$(12)\begin{cases}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,d\,x=\frac{f(a)\pm f_0}{2}\int_a^{\alpha_1}\varphi(x)\,d\,x+\\ \displaystyle\qquad+\frac{1}{2}\sum\int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}}\{2\,f(x)-f(\alpha_s)-f(\alpha_{s+1})\}\,\varphi(x)\,dx,\\ \displaystyle\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,d\,x=\frac{f(a)\pm f_0}{2}\int_a^{\alpha_1}\varphi(x)\,d\,x+\theta_2\sum D_s\int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}}\varphi_1(x)\,d\,x,\end{cases}$$

„ nella seconda delle quali $\varphi_1(x)$ indica al solito la funzione dei „ valori assoluti di $\varphi(x)$, che, per la formola stessa, si suppone „ atta all'integrazione fra a e b. E quando $\varphi(x)$ è sempre finita „ fra a e b, e φ_0 è il limite superiore dei suoi valori assoluti o „ un numero maggiore, queste formole si possono anche ridurre „ all' altra:

$$(13)\quad \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,d\,x=\frac{f(a)\pm f_0}{2}\int_a^{\alpha_1}\varphi(x)\,d\,x+\theta_3\,\varphi_0\sum\delta_s\,D_s\,.\text{ „}$$

Nel caso poi che i massimi e minimi che quì si considerano dell' integrale $\int_a^x \varphi(x)\,d\,x$ siano successivi, si può osservare che allora in ciascuno degli integrali $\int_\alpha^{\alpha_{s+1}}\{2f(x)-f(\alpha_s)-f(\alpha_{s+1})\}\,\varphi(x)\,dx$ la funzione $\varphi(x)$, all'infuori tutt' al più di una funzione d' integrale nullo, ha sempre lo stesso segno o è nulla (perchè negli intervalli $(\alpha_s\ ,\ \alpha_{s+1})$ l'integrale $\int_a^x \varphi(x)dx$ ha gli estremi oscillatorii dello stesso segno o nulli), e quindi a causa della formola (1) ciascuno degli integrali medesimi può rappresentarsi con $\{2\overline{f_s}-f(\alpha_s)-f(\alpha_{s+1})\}\int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}}\varphi(x)dx$ essendo $\overline{f_s}$ un numero compreso fra il limite inferiore e superiore di $f(x)$

nell'intervallo (α_s, α_{s+1}). Si vedrà da ciò che la somma della prima delle (12) nelle attuali ipotesi rispetto ai punti $a, \alpha_1, \alpha_2 \ldots . \alpha_{n-1}, b$ potrà anche rappresentarsi con $\theta_4 \sum D_s \int_a^{\alpha_1} \varphi(x)\, dx$, essendo θ_4 compreso fra -1 e 1, e in conseguenza si avrà anche la formola seguente:

$$(14) \qquad \int^b f(x)\,\varphi(x)\,d\,x = \left\{ \frac{f(a) \pm \overline{f_0}}{2} + \theta_4 \sum D_s \right\} \int_a^{\alpha_1} \varphi(x)\,d\,x.$$

12. La formola (11) ci conduce anche ad altre nelle quali invece di avere delle condizioni pei punti $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}$ che può dirsi dipendano dalla funzione $\varphi(x)$ che continua a comparire sotto i segni integrali dei secondi membri, si hanno altre condizioni per la funzione $f(x)$ che è fuori dei segni integrali.

Si supponga infatti che le quantità:

$$f(a) + f(\alpha_1)\ ,\ f(\alpha_1) + f(\alpha_2), \ldots . , f(\alpha_{n-1}) + f(b)$$

siano tutte dello stesso segno o nulle, e in valore assoluto non vadano mai crescendo o non vadano mai decrescendo, e si applichi il solito teorema di Abel coll'osservare che le somme successive dei coefficienti di queste quantità nel senso in cui sono scritte o nel senso opposto sono comprese fra i limiti inferiori e superiori λ e Λ dell'integrale $\int_a^x \varphi(x)\,d\,x$, o fra quelli λ' e Λ' dell'altro $\int_x^b \varphi(x)\,d\,x$.

Si vedrà subito allora che nel primo caso la somma dei primi n termini della (11) è compresa fra $\frac{f(a)+f(\alpha_1)}{2}\lambda$ e $\frac{f(a)+f(\alpha_1)}{2}\Lambda$, e nel secondo fra $\frac{f(\alpha_{n-1})+f(b)}{2}\lambda'$ e $\frac{f(\alpha_{n-1})+f(b)}{2}\Lambda'$; quindi poichè gli integrali $\int_a^x \varphi(x)\,d\,x$, $\int_x^b \varphi(x)\,dx$, come funzioni continue di x fra a e b, col passare di x da a a b prendono qua-

lunque valore compreso fra λ e Λ o fra λ' e Λ', indicando con ξ un valore determinato di x fra a e b si vede chiaramente che la somma dei primi n termini del secondo membro della formola (11) nel primo caso potrà rappresentarsi con

$\frac{f(a)+f(\alpha_1)}{2}\int_a^\xi \varphi(x)\,dx$, e nel secondo con $\frac{f(\alpha_{n-1})+f(b)}{2}\int_\xi^b \varphi(x)\,dx$;.

talchè, osservando al solito che la somma degli ultimi n termini del secondo membro della (11) può ancora rappresentarsi con

$\theta_2 \sum D_s \int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}} \varphi_1(x)\,dx$ o con $\theta_3\,\varphi_0 \sum \delta_s\, D_s$, si conclude intanto che

quando le somme:

$$(15)\qquad f(a)+f(\alpha_1)\ ,\ f(\alpha_1)+f(\alpha_2)\ ,\ \ldots\ ,\ f(\alpha_{n-1})+f(b)$$

siano dello stesso segno o nulle e in valore assoluto non vadano mai crescendo o non vadano mai decrescendo, si avrà respettivamente l' uno o l'altro dei sistemi di formole seguenti:

$$(16)\left\{\begin{aligned} \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx &= \frac{f(a)+f(\alpha_1)}{2}\int_a^\xi \varphi(x)\,dx + \\ &\quad \frac{1}{2}\sum\int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}} \{2f(x)-f(\alpha_s)-f(\alpha_{s+1})\}\varphi(x)\,dx, \\ \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx &= \frac{f(a)+f(\alpha_1)}{2}\int_a^\xi f(x)\,dx + \theta_2\sum D_s\int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}}\varphi_1(x)\,dx, \end{aligned}\right.$$

$$(17)\left\{\begin{aligned} \int_a^b f(x)\varphi(x)dx &= \frac{f(\alpha_{n-1})+f(b)}{2}\int_\xi^b \varphi(x)dx + \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum\int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}} \{2f(x)-f(\alpha_s)-f(\alpha_{s+1})\}\varphi(x)dx, \\ \int_a^b f(x)\varphi(x)dx &= \frac{f(\alpha_{n-1})+f(b)}{2}\int_\xi^b \varphi(x)dx + \theta_2\sum D_s\int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}}\varphi_1(x)\,dx; \end{aligned}\right.$$

e nel caso che $\varphi(x)$ sia sempre finito, e sia φ_0 il limite superiore dei suoi valori assoluti o un numero maggiore, queste formole si potranno anche scrivere:

$$(18)\quad \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = \frac{f(a)+f(\alpha_1)}{2}\int_a^{\xi}\varphi(x)\,dx + \theta_2\,\varphi_0\sum \delta_s\,D_s\,,$$

$$(19)\quad \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = \frac{f(\alpha_{n-1})+f(b)}{2}\int_{\xi}^{b}\varphi(x)\,dx + \theta_2\,\varphi_0\sum \delta_s\,D_s\,.$$

Si può poi osservare che la condizione che le somme (15) siano dello stesso segno e non vadano mai crescendo o non vadano mai decrescendo in valore assoluto, equivale all' altra che le due somme estreme siano dello stesso segno, e si abbiano i due sistemi di condizioni

$$f(a) \geq f(\alpha_2) \geq f(\alpha_4) \geq \ldots \geq f(\alpha_{2s}) \geq \ldots$$
$$f(\alpha_1) \geq f(\alpha_3) \geq f(\alpha_5) \geq \ldots \geq f(\alpha_{2s+1}) \geq \ldots$$

o i due altri sistemi:

$$f(a) \leq f(\alpha_2) \leq f(\alpha_4) \leq \ldots .$$
$$f(\alpha_1) \leq f(\alpha_3) \leq f(\alpha_5) \leq \ldots .$$

talchè se per es. $f(x)$ ha fra a e b e in a e b dei punti di massimo o di minimo, e in essi i valori della funzione sono positivi e non vanno crescendo o non vanno decrescendo, allora potremo prendere i punti di massimo o quelli di minimo come punti a, α_1, α_2 .... α_{n-1}, b e applicare le formole (16) e (17) respettivamente.

13. Le formole del paragrafo precedente conducono ad estendere le (3) e (4) al caso in cui $\varphi(x)$ divenga infinita fra a e b; ma per questo è necessario premettere il teorema seguente:

Se $\psi(x)$ è una funzione che in un intervallo finito (α, β) è atta alla integrazione ma diviene infinita in un gruppo finito o infinito di punti di prima specie, questi punti d'infinito di $\psi(x)$ si potranno racchiudere in un numero finito d'intervalli talmente piccoli che il valore assoluto della somma degli integrali estesi a questi intervalli, e anche la somma dei loro valori assoluti sia inferiore a quel numero che più ci piace σ.

E chiaro infatti che ciò avviene sempre se i punti d' infinito α_1, α_2, . . di $\psi(x)$ sono in numero finito, perchè allora se per es. $\alpha < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \beta$, ognuno dei contributi $\int_{\alpha_1-\varepsilon_1}^{\alpha_1+\varepsilon'_s}$, $\int_{\alpha_2-\varepsilon_2}^{\alpha_2+\varepsilon'_2}$, . . . relativi agli intorni di questi punti (*m. l.* §. 222), quando ε_1, ε_2, . . . ε'_1, ε'_2, . . . son numeri positivi sufficientemente piccoli, è minore in valore assoluto di quel numero che più ci piace σ.

Se poi i punti d'infinito di $\psi(x)$ costituiscono un gruppo G di ordine $\nu > 0$, allora indicando con α_1, α_2, . . α_m i punti del ν^0 gruppo derivato $G^{(\nu)}$, e supponendo per es. $\alpha < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_m < \beta$, si potranno racchiudere questi punti entro m intervalli $(\alpha_1-\varepsilon_1, \alpha_1+\varepsilon'_1)$, $(\alpha_2-\varepsilon_2, \alpha_2+\varepsilon'_2)$, . . . talmente piccoli che ciascuno degli integrali $\int_{\alpha_1-\varepsilon_1}^{\alpha_1+\varepsilon'_1}$, $\int_{\alpha_2-\varepsilon_2}^{\alpha_2+\varepsilon'_2}$, . . . sia numericamente inferiore a $\frac{\sigma}{m(\nu+1)}$, e quindi la somma dei loro valori assoluti sarà inferiore a $\frac{\sigma}{\nu+1}$.

Allora negli intervalli rimasti non cadranno altro che un numero finito m' di punti $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots$ del gruppo derivato $G^{(\nu-1)}$ di ordine $\nu-1$, e anche questi si potranno escludere con altri intervalli tali che ciascuno degli integrali estesi a questi nuovi intervalli sia numericamente inferiore a $\frac{\sigma}{m'(\nu+1)}$, e quindi la somma dei loro valori assoluti sia inferiore a $\frac{\sigma}{\nu+1}$.

Così continuando, si vede chiaramente che si verranno a formare un numero finito $m+m' \ldots + m^{(\nu)}$ d' intervalli $i'_1, i'_2, \ldots i'_s, \ldots$ che comprendano tutti i punti d' infinito di $\psi(x)$ e tali che la somma dei valori assoluti degli integrali estesi ad essi sia numericamente inferiore a quel numero che più ci piace σ, come appunto abbiamo enunciato sopra.

14. Ciò premesso, si osservi che se per le funzioni del

§. 12. si suppone per es. che $f(x)$ fra a e b abbia sempre lo stesso segno o sia nulla e non vada mai crescendo in valore assoluto, il simbolo $f(a+0)$ avrà un significato, e escludendo naturalmente il caso in cui $f(x)$ fosse sempre zero, $f(a+0)$ non sarà zero, e inoltre, quand'anche non fosse $f(a)=f(a+0)$, potremo, senza alterare nulla, supporre $f(a)=f(a+0)$.

Oltre a ciò, i punti a, α_1, α_2, . . . , α_{n-1}, b potranno supporsi prossimi fra loro quanto si vuole senza che le quantità:

$$f(a)+f(\alpha_1)\quad,\quad f(\alpha_1)+f(\alpha_2)\;,\;\ldots\;,\;f(\alpha_{n-1})+f(b)$$

cessino per questo di soddisfare alla condizione di mantenersi tutte dello stesso segno o nulle e di non andare mai crescendo in valore assoluto; e in conseguenza la somma dei primi n termini del secondo membro della (11) sarà sempre compresa fra $\frac{f(a)+f(\alpha_1)}{2}\lambda$ e $\frac{f(a)+f(\alpha_1)}{2}\Lambda$, essendo λ e Λ i valori minimo e massimo dell'integrale $\int_a^x \varphi(x)dx$ per x compreso fra a e b.

Siccome poi si ammette, come è naturale, che il prodotto $f(x)\varphi(x)$ sia atto all'integrazione insieme a $\varphi(x)$ fra a e b, quand'anche $\varphi(x)$ divenga infinita in un gruppo di punti finito o infinito di prima specie, pel teorema del paragrafo precedente si potrà intendere di aver racchiusi questi punti d'infinito di $\varphi(x)$ in un numero finito di intervalli i_1, i_2, . . . i_s, . . . talmente piccoli che la somma dei valori assoluti degli integrali $\int f(x)\varphi(x)dx, \int \varphi(x)dx$ estesi a questi intervalli sia minore di quel numero che più ci piace.

Allora evidentemente altrettanto accadrà della somma dei valori assoluti di quelli fra gli ultimi n integrali del secondo membro della (11) pei quali uno almeno dei limiti α_t, α_{t+1} viene a cadere negli intervalli i_s, e basterà quindi occuparsi di quelli fra gli stessi integrali i cui limiti cadono negli intervalli rimanenti j_1, j_2, . . j_s, . .

Ma poichè in questi intervalli j_s la funzione $\varphi(x)$ è sempre

numericamente inferiore a un numero finito φ_0, s'intende subito che la somma degli stessi integrali in valore assoluto sarà inferiore a $\varphi_0 \Sigma \delta_s D_s$, ove D_s sono le oscillazioni di $f(x)$ negli intervalli (α_s, α_{s+1}); quindi, poichè $f(x)$ è sempre finita e atta alla integrazione fra a e b,quando i punti $a, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}, b$ siano presi abbastanza vicini fra loro, le somme $\Sigma \delta_s D_s$ e così anche la somma degli stessi integrali saranno numericamente inferiori a quel numero che più ci piace.

Segue da ciò evidentemente che la quantità

$\frac{2}{f(a+0)+f(\alpha_1)}\int_a^b f(x)\varphi(x)dx$, o anche l'altra $\frac{1}{f(a+0)}\int_a^b f(x)\varphi(x)dx$

(poichè $f(\alpha_1)$ può supporsi prossima quanto si vuole a $f(a+0)$) sarà compresa fra $\lambda-\sigma$ e $\Lambda+\sigma$, essendo σ un numero piccolo a piacere, e perciò anche fra λ e Λ, ove λ e Λ sono come abbiamo detto i limiti inferiore e superiore dell'integrale $\int_a^x \varphi(x)\,dx$;

dunque poichè a causa della continuità questo integrale col variare di x fra a e b, prende qualsiasi valore fra λ e Λ, resta ora evidente che indicando con ξ un numero compreso fra a e b (a e b incl.) si avrà la formola:

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,d\,x = f(a+0)\int_a^\xi \varphi(x)\,d\,x.$$

In modo simile se $f(x)$ non cangia mai segno da a a b e non và mai decrescendo in valore assoluto, si trova che

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,d\,x = f(b-0)\int_\xi^b \varphi(x)\,d\,x,$$

con $a \leq \xi \leq b$; dunque si può ora evidentemente concludere che: „ Se le funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$ sono atte alla integrazione „ fra i numeri finiti a e b insieme al loro prodotto $f(x)\,\varphi(x)$, „ e la funzione $f(x)$ oltre esser sempre finita fra a e b non cangia „ mai di segno, e nel passare di x da a a b non và mai crescendo in valore assoluto si avrà la formola:

$$(20) \qquad \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(a+0)\int_a^\xi \varphi(x)\,dx\,;$$

„ mentre se da a a b $f(x)$ è sempre finita, non cangia mai
„ segno, e non và mai decrescendo in valore assoluto, si avrà
„ invece l'altra:

$$(21) \qquad \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(b-0)\int_\xi^b \varphi(x)\,dx,$$

„ essendo in ambedue i casi ξ un numero determinato compreso
„ fra a e b (a e b incl.) „.

15. Questo teorema estende evidentemente quello del §. 212 del mio libro al caso in cui la funzione $\varphi(x)$ fra a e b divenga infinita in un gruppo finito o infinito di punti di prima specie; e ora coi ragionamenti stessi del §. 213. dello stesso libro si trova che la formola (3), cioè:

$$(22) \quad \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(a+0)\int_a^\xi \varphi(x)\,dx + f(b-0)\int_\xi^b \varphi(x)\,dx,$$

che è relativa al caso in cui $f(x)$ da a e b non và mai crescendo o non và mai decrecendo, sussiste anche quando $\varphi(x)$ non è sempre finita fra a e b, essendo però atta all'integrazione insieme al prodotto $f(x)\,\varphi(x)$ nell' intervallo stesso (a, b), come appunto fu trovato sotto altra forma dal sig. Du Bois-Reymond.

Ripetendo poi i ragionamenti del §. 262. del mio libro si trova che le formole (20), (21) e (22) sussistono anche nel caso in cui l' intervallo (a, b) è di ampiezza infinita purchè restino verificate tutte le altre condizioni che si sono poste nel caso di a e b finiti; talchè vengono così estesi i casi di validità delle formole (3) o (4).

16. Le formole generali dei paragrafi precedenti sono quelle che al §. 8. dicemmo trovare utile di esporre, per quanto non tutte verranno da noi applicate nei presenti studii. Ora passiamo a considerare gli integrali della forma $\int \frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x}\,dx$, e incominciamo col dimostrare il seguente:

Teorema I. *Se* $h=2n+1$, *qualunque sia il numero intero e positivo* n *si ha:*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} h x}{\operatorname{sen} x}\, d x=\frac{\pi}{2},$$

e quindi anche:

$$\lim_{h=\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} h x}{\operatorname{sen} x}\, d x=\frac{\pi}{2}.$$

Osserviamo infatti che cambiando $\frac{x-\alpha}{2}$ in x nella (10) del §. 6, si ha qualunque sia n:

$$\frac{\operatorname{sen} h x}{\operatorname{sen} x}=1+2\sum_1^n \cos 2 n x,$$

e di quì integrando fra 0 e $\frac{\pi}{2}$ si trova subito la prima e quindi anche la seconda delle formole precedenti.

17. Teorema II. *Supponendo* $0<a<b\leq\frac{\pi}{2}$, *e indicando ora con* h *un numero positivo che cresce all' infinito con una legge qualsiasi, e con* μ *un numero che può prendersi sempre uguale a* 4, *ma che propriamente basta prendere uguale a* 4 *se nè* a *nè* b *sono multipli esatti di* $\frac{2\pi}{h}$, *e uguale a* 0 *o a* 2 *se* a *e* b *o una sola di queste quantità è un multiplo esatto di* $\frac{2\pi}{h}$, *si avrà in valore assoluto:*

$$\int_a^b \frac{\operatorname{sen} h x}{\operatorname{sen} x} dx<\frac{\mu \pi}{h \operatorname{sen} a}+\frac{b-a}{h \operatorname{sen}^2 a}; \tag{23}$$

e quindi se a *e* b *sono indipendenti da* h, *o anche se variano*

con h ma in modo che non superino mai $\frac{\pi}{2}$ *e* a *resti sempre discosto da zero più di una quantità determinata* (*), *si avrà anche:*

$$(24)\qquad \lim_{h=\infty}\int_a^b \frac{\operatorname{sen} h x}{\operatorname{sen} x}\, d x = 0 .$$

Per dimostrare questo teorema, consideriamo un valore speciale di h fra quelli che esso può avere, e indichiamo con $p\frac{2\pi}{h}$ il primo multiplo di $\frac{2\pi}{h}$ non inferiore ad a, e con $(p+q)\frac{2\pi}{h}$ quello immediatamente inferiore o uguale a b. Sarà $q\frac{2\pi}{h} \leq b-a$, e si avrà:

$$(25)\qquad \int_a^b \frac{\operatorname{sen} h x}{\operatorname{sen} x} = \int_a^{\frac{2p\pi}{h}} \frac{\operatorname{sen} h x}{\operatorname{sen} x}\, d x + t_0 + t_1 + \ldots + t_{q-1} + \int_{2(p+q)\frac{\pi}{h}}^b \frac{\operatorname{sen} h x}{\operatorname{sen} x}\, dx,$$

essendo:

$$t_s = \int_{2(p+s)\frac{\pi}{h}}^{2(p+s+1)\frac{\pi}{h}} \frac{\operatorname{sen} h x}{\operatorname{sen} x}\, d x = \frac{1}{h}\int_{2(p+s)\pi}^{2(p+s+1)\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}\frac{x}{h}}\, d x ,$$

e dei due integrali del secondo membro uno o tutti e due mancheranno se una o tutte e due le quantità a e b saranno multipli esatti di $\frac{2\pi}{h}$.

(*) Per ciò che si richiede a dimostrare la formola di Fourier, basterebbe supporre che i limiti degli integrali che si considerano in questi teoremi e nei seguenti fossero fissi, soddisfacendo però alle condizioni che via via si pongono. Ma ove si può con facili considerazioni supporli variabili con h senza che i teoremi stessi cessino di sussistere, noi ammetteremo che possano variare (dicendolo però sempre esplicitamente); e ciò allo scopo di non porre inutili limitazioni negli enunciati di teoremi che possono tornare utili anche per altre teorie.

Ora, ponendo per comodità di notazione $2(p+s)\pi=\alpha$, $(2p+2s+1)\pi=\beta$, si ha:

$$t_s=\frac{1}{h}\int_\alpha^\beta\frac{\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}\frac{x}{h}}d\,x-\frac{1}{h}\int_\alpha^\beta\frac{\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}\frac{x+\pi}{h}}d\,x=$$

$$=\frac{1}{h}\int_\alpha^\beta\operatorname{sen}x\left\{\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{x}{h}}-\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{x+\pi}{h}}\right\}dx=\frac{2}{h}\int_\alpha^\beta\frac{\operatorname{sen}x\operatorname{sen}\frac{\pi}{2h}\cos\left(\frac{x}{h}+\frac{\pi}{2h}\right)}{\operatorname{sen}\frac{x}{h}\operatorname{sen}\frac{x+\pi}{h}}dx;$$

quindi, siccome in questi integrali $\frac{x}{h}$ e $\frac{x+\pi}{h}$ sono sempre inferiori a $\frac{\pi}{2}$ perchè $b\leq\frac{\pi}{2}$, le quantità t_s saranno sempre positive, e si avrà:

$$t_s<\frac{2\operatorname{sen}\frac{\pi}{2h}}{h\operatorname{sen}^2 a}\int_\alpha^\beta\operatorname{sen}x\,dx<\frac{\frac{2\pi}{h}}{h\operatorname{sen}^2 a},$$

donde osservando che $q\frac{2\pi}{h}\leq b-a$, e che i due integrali che compariscono nel secondo membro della (25) in valore assoluto sono entrambi inferiori a $\frac{2\pi}{h\operatorname{sen}a}$, si otterrà subito la formola (23) e quindi anche la (24)'.

Si può osservare che la formola (24) continua a sussistere anche quando a tende a zero al crescere indefinito di h, purchè però al tempo stesso la quantità $h\operatorname{sen}^2 a$, o $h\,a^2$ cresca indefinitamente, o almeno tenda a zero anche b, e $h\,a$ e il quoziente $\frac{h\,a^2}{b}$ crescano indefinitamente.

18. Giova anche notare che dal processo di dimostrazione che abbiamo seguito apparisce chiaramente che quando per un dato valore di h si fà crescere b a partire da un multiplo di $\frac{2\pi}{h}$ senza fargli superare $\frac{\pi}{2}$, l'integrale $\int_a^b\frac{\operatorname{sen}hx}{\operatorname{sen}x}dx$ viene sem-

pre ad aumentare, giacchè le nuove quantità t_s che così si vengono ad aggiungere sono positive e l'ultimo integrale è pure positivo.

Del resto poi, considerando l'integrale $\int_0^x \frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x} dx$ per x compreso fra 0 e $\frac{\pi}{2}$, se si osserverà che sen hx si annulla cangiando segno nei punti $\frac{\pi}{h}, \frac{2\pi}{h}, \frac{3\pi}{h}, \ldots$ e si annulla pure per $x=0$, mentre fra 0 e $\frac{\pi}{h}$ è positivo, si concluderà subito che l'integrale stesso $\int_0^x \frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x} dx$ fra 0 e $\frac{\pi}{2}$ ha i suoi minimi nei punti 0, $\frac{2\pi}{h}, \frac{4\pi}{h}, \ldots$, e ha i suoi massimi nei punti $\frac{\pi}{h}, \frac{3\pi}{h}, \frac{5\pi}{h}, \ldots$; e siccome per ciò che vedemmo la differenza t_s fra un valore minimo e il precedente è positiva, mentre si vedrebbe al modo stesso che la differenza fra un valore massimo e il precedente è negativa, si può anche evidentemente affermare che per x fra 0 e $\frac{\pi}{2}$, qualunque sia il valore che si considera di h, i minimi dell'integrale $\int_0^x \frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x} dx$ col passare di x da 0 a $\frac{\pi}{2}$ vanno sempre crescendo, e i massimi vanno sempre decrescendo, e col crescere di x a partire da un multiplo di $\frac{\pi}{h}$ o di $\frac{2\pi}{h}$ l'integrale stesso và decrescendo o crescendo respettivamente. Inoltre fra 0 e $\frac{\pi}{2}$ questo integrale non è mai negativo e il suo massimo valore è $\int_0^{\frac{\pi}{h}} \frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x} dx$, e in

conseguenza non supera mai π; giacchè per la (1) si ha

$$\int_0^{\pi} \frac{h \operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x} dx = \frac{\operatorname{sen} hx'}{\operatorname{sen} x'} \int_0^{\frac{\pi}{h}} h\, dx = \pi \frac{\frac{\operatorname{sen} hx'}{hx'}}{\frac{\operatorname{sen} x'}{x'}},$$ ove x' è un numero

compreso fra 0 e $\frac{\pi}{h}$; e siccome per y fra 0 e π la funzione $\frac{\operatorname{sen} y}{y}$ è decrescente, è evidente che la quantità che moltiplica il π è inferiore all' unità.

19. Questi risultati conducono a dimostrare anche il seguente:

Teorema III. *Se h è un numero positivo che cresce indefinitamente con una legge qualunque, e b è un numero diverso da zero e positivo che anche se varia con h non supera mai $\frac{\pi}{2}$ e non si accosta a zero più di una quantità determinata, si avrà:*

$$\lim_{h=\infty} \int_0^b \frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x} dx = \frac{\pi}{2}. \tag{26}$$

Consideriamo infatti l' integrale $\int_0^b \frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x} dx$ per uno qualunque dei valori speciali che h può avere.

Evidentemente indicando con h' il primo numero dispari uguale o superiore a h, e con a un numero diverso da zero ma inferiore a $\frac{\pi}{4}$ e compreso fra 0 e b, che può anche prendersi piccolo a piacer nostro, si potrà scrivere:

$$h = h' - \gamma \quad , \quad \int_0^b \frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x} dx = \int_0^a \frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x} dx + \int_a^b \frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x} dx, \tag{27}$$

essendo γ un numero positivo compreso fra 0 e 2.

Ora si ha:

$$\int_0^a \frac{\operatorname{sen} h x}{\operatorname{sen} x} dx = \int_0^a \frac{\operatorname{sen}(h'-\gamma)x}{\operatorname{sen} x} dx = \int_0^a \frac{\operatorname{sen} h'x \cos\gamma x}{\operatorname{sen} x} dx -$$

$$- \int_0^a \frac{\cos h'x \operatorname{sen} \gamma x}{\operatorname{sen} x} dx ,$$

e poichè la nota formola $f(\delta)=f(0)+\delta f'(\theta\delta)$ con $0<\theta<1$ ci dà $\cos\gamma x = 1-\gamma x \operatorname{sen}\gamma_1 x$, essendo γ_1 un numero positivo inferiore a γ, e quindi compreso anch' esso fra 0 e 2, sarà:

$$\int_0^a \frac{\operatorname{sen} h x}{\operatorname{sen} x} dx = \int_0^a \frac{\operatorname{sen} h'x}{\operatorname{sen} x} dx - \int_0^a \frac{\gamma x \operatorname{sen} h'x \operatorname{sen}\gamma_1 x}{\operatorname{sen} x} dx -$$

$$- \int_0^a \frac{\cos h'x \operatorname{sen}\gamma x}{\operatorname{sen} x} dx ,$$

donde per la seconda delle (27), e per essere (§. 16):

$$\int_0^a \frac{\operatorname{sen} h'x}{\operatorname{sen} x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} h'x}{\operatorname{sen} x} dx - \int_a^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} h'x}{\operatorname{sen} x} dx = \frac{\pi}{2} - \int_a^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} h'x}{\operatorname{sen} x} dx ,$$

si deduce che:

$$\int_0^b \frac{\operatorname{sen} h x}{\operatorname{sen} x} dx - \frac{\pi}{2} = \int_a^b \frac{\operatorname{sen} h x}{\operatorname{sen} x} dx - \int_a^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} h'x}{\operatorname{sen} x} dx -$$

$$- \int_0^a \gamma x \operatorname{sen} h'x \frac{\operatorname{sen}\gamma_1 x}{\operatorname{sen} x} dx - \int_0^a \cos h'x \frac{\operatorname{sen}\gamma x}{\operatorname{sen} x} dx .$$

Ma evidentemente, essendo γ e γ_1 inferiori a 2, e essendo $2a$ inferiore a $\frac{\pi}{2}$, i rapporti $\frac{\operatorname{sen}\gamma_1 x}{\operatorname{sen} x}$, $\frac{\operatorname{sen}\gamma x}{\operatorname{sen} x}$ sono inferiori a 2 in tutto il corso dell' integrazione, giacchè, per $0<x\leq a$, dall'essere $\operatorname{sen}\gamma_1 x < \operatorname{sen} 2x$, e $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$, si ha $\frac{\operatorname{sen}\gamma_1 x}{\operatorname{sen} x} < 2\cos x < 2$, ec; quindi sarà in valore assoluto:

$$\int_0^a \gamma x \operatorname{sen} h'x \frac{\operatorname{sen}\gamma_1 x}{\operatorname{sen} x} dx < 4\int_0^a x\,dx, \text{ cioè} < 2a^2, \int_0^a \cos h'x \frac{\operatorname{sen}\gamma x}{\operatorname{sen} x} dx < 2a;$$

dunque poichè la (23) ci dà anche:

$$\int_a^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} h'x}{\operatorname{sen} x} dx < \frac{\mu\pi}{h' \operatorname{sen} a} + \frac{\frac{\pi}{2}-a}{h' \operatorname{sen}^2 a} < \frac{\mu\pi}{h \operatorname{sen} a} + \frac{\pi}{2h \operatorname{sen}^2 a},$$

$$\int_a^b \frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x} dx < \frac{\mu\pi}{h \operatorname{sen} a} + \frac{b-a}{h \operatorname{sen}^2 a} < \frac{\mu\pi}{h \operatorname{sen} a} + \frac{\pi}{2h \operatorname{sen}^2 a},$$

si conclude che in valore assoluto sarà:

$$(28) \qquad \int_0^b \frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x} dx - \frac{\pi}{2} < 2a^2 + 2a + \frac{2\mu\pi}{h \operatorname{sen} a} + \frac{\pi}{h \operatorname{sen}^2 a},$$

ove μ è tutt' al più eguale a 4; e questa, coll'osservare che il numero a può prendersi piccolo a piacer nostro, e poi dopo di averlo scelto si può far crescere h quanto si vuole, ci mostra appunto che:

$$\lim_{h=\infty} \int_0^b \frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x} dx = \frac{\pi}{2},$$

qualunque sia il modo di crescere all'infinito di h, e anche se b varia con h in modo però da non superare mai $\frac{\pi}{2}$, e da non accostarsi a. zero più di un numero determinato b'.

20. Se poi b pur restando sempre diverso da zero e positivo si accosta indefinitamente a zero al crescere indefinito di h, ma almeno da un certo valore h_0 di h in poi il prodotto hb^2 si mantiene sempre maggiore di un numero dato arbitrariamente grande ω, allora si avrà ancora $\lim_{h=\infty} \int_0^b \frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x} dx = \frac{\pi}{2}$; giacchè indicando con ε un numero fisso ma piccolo a piacer nostro, e considerando i valori di h maggiori nello stesso tempo del

numero h_0 e di quel numero h_1 pel quale $h\varepsilon^2$ è sempre superiore a ω, s'intende subito che nella formola (28) pei valori di h superiori a h_0 e h_1 pei quali b sia inferiore o uguale a ε potremo prendere $a=b$, e per quelli pei quali il b sia superiore a ε potremo prendere $a=\varepsilon$, e così si avrà, sempre in valore assoluto:

$$\int_0^b \frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x}dx-\frac{\pi}{2} < 2\varepsilon^2+2\varepsilon+\frac{\mu\,\pi\,\varepsilon^2}{\omega \operatorname{sen}\varepsilon}+\frac{\pi\varepsilon^2}{\omega \operatorname{sen}^2\varepsilon}\,;$$

e quindi sarà ancora $\lim\limits_{h=\infty}\displaystyle\int_0^b \frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x}dx=\frac{\pi}{2}$.

Del resto poi, quando b non si accosta a zero più di una quantità determinata, indicando con $\varphi(h)$ una quantità che cresce indefinitamente con h ma di ordine inferiore a quello di h, si potrà prendere $a=\sqrt{\dfrac{\varphi(h)}{h}}$, e lo stesso potrà farsi quando b tende a zero, purchè vi tenda in modo che almeno da un certo valore di h in poi non si abbia mai $b<\sqrt{\dfrac{\varphi(h)}{h}}$; talchè in questi casi si avrà, sempre in valore assoluto, a partire da un certo valore di h:

$$(29)\qquad \int_0^b \frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x}dx-\frac{\pi}{2} < 2\frac{\varphi(h)}{h}+2\sqrt{\frac{\varphi(h)}{h}}+\frac{2\theta\mu\pi}{\sqrt{h\varphi(h)}}+\frac{\theta^2\pi}{\varphi(h)},$$

essendo θ il valore del rapporto $\dfrac{\sqrt{\dfrac{\varphi(h)}{h}}}{\operatorname{sen}\sqrt{\dfrac{\varphi(h)}{h}}}$, per modo che a partire da un conveniente valore di h in poi potrà prendersi per θ quel numero che più ci piace superiore a 1.

In particolare prendendo $\varphi(h)=h^{1-\varepsilon}$, con ε numero positivo prossimo quanto si vuole a zero, si avrà la formola:

$$(30)\qquad \int_0^b \frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x}dx - \frac{\pi}{2} < \frac{2}{h^{\varepsilon}} + \frac{2}{h^{\frac{1}{2}\varepsilon}} + \frac{2\theta\mu\pi}{h^{1-\frac{1}{2}\varepsilon}} + \frac{\theta^2\pi}{h^{1-\varepsilon}},$$

che viene così a valere dopo che h sia maggiore di un certo numero, e quando b non si accosta a zero più di un numero determinato b', o accostandosi a zero indefinitamente finisce per restar sempre maggiore o uguale a $\frac{1}{\sqrt{h^{\varepsilon}}}$.

Si può poi aggiungere che se h cresce indefinitamente per numeri dispari, allora osservando che:

$$\int_0^b \frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x}dx - \int_b^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x} = \frac{\pi}{2} - \int_b^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x}dx,$$

e applicando il lemma secondo si trova che in valore assoluto, per b compreso fra 0 e $\frac{\pi}{2}$ si ha la formola più semplice:

$$(31)\qquad \int_0^b \frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x}dx - \frac{\pi}{2} < \frac{\mu\pi}{h \operatorname{sen} b} + \frac{\frac{\pi}{2} - b}{h \operatorname{sen}^2 b};$$

e se b è un multiplo esatto di $\frac{2\pi}{h}$, la differenza $\int_0^b \frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x}dx - \frac{\pi}{2}$ è negativa, e si può prendere $\mu=2$.

III. Studio sugli integrali che sono atti a rappresentare analiticamente una funzione.

21. Gli integrali che noi avremmo da considerare, ove volessimo occuparci soltanto degli sviluppi in serie di Fourier, sarebbero quelli del §. 6., e come è facile a vedersi basterebbe limitarsi a considerare i seguenti:

$$(1)\qquad \int_0^b f(x)\frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x}dx\,,\qquad \int_a^b f(x)\frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x}dx\,,$$

con $0<a<b\leq\frac{\pi}{2}$.

Volendo però studiare anche altri sviluppi con un metodo uniforme, noi osserveremo che le proprietà date sopra per gli integrali $\int_0^b \frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x}dx$, $\int_a^b \frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x}dx$ ci mostrano che gli integrali (1) rientrano nella forma più generale $\int_0^a f(x)\varphi(x\,,h)dx$, $\int_a^b f(x)\varphi(x\,,h)dx$, ove a e b sono numeri diversi da zero e dello stesso segno che almeno ordinariamente dovranno essere presi fra limiti determinati, e $\varphi(x\,,h)$ è una funzione che per qualsiasi valore finito di h è atta all' integrazione nell'intervallo nel quale si considera, e per x diverso da zero si mantiene finita anche al crescere indefinito di h, ma in vicinanza del punto $x=0$, a destra o a sinistra secondochè a è positivo o negativo, prende anche valori tanto più grandi quanto più è grande h, e oltre a ciò è tale che per gli indicati valori di a e b si ha:

$$(2)\qquad \lim_{h=\infty}\int_a^b \varphi(x\,,h)\,dx=0,\qquad \lim_{h=\infty}\int_0^a \varphi(x\,,h)\,dx=G,$$

essendo G una quantità determinata e finita indipendente da a, e diversa da zero (*); e noi quindi, anzichè prendere a studiare

(*) Di funzioni $\varphi(x\,,h)$ che soddisfano alle condizioni quì indicate ve ne sono un numero infinito. Fra esse alcune delle più semplici sono le seguenti: $\varphi(x\,,h)=h\,e^{-hx}$, $\varphi(x\,,h)=\frac{h}{1+h^2x^2}$, $\varphi(x\,,h)=\frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x}$, per la prima delle quali a e b devono supporsi positivi, per la seconda a e b possono essere qualunque purchè però dello stesso segno, e per la terza a e b devono soddisfare alle condizioni dei §§. 17, 18 e 19. S'intende poi che essendo a e b per es. positivi, la funzione $\varphi(x\,,h)$ deve di necessità soddisfare alla condizione che in vicinanza di $x=0$ a destra

gli integrali (1), studieremo gli integrali più generali $\int_0^b f(h)\,\varphi(x\,,h)\,dx\,,\ \int_a^b f(x)\,\varphi(x\,,h)\,dx$, ove $\varphi(x,h)$ è una funzione per la quale da principio noi supporremo soltanto che sia finita e atta all'integrazione fra i limiti degli integrali e soddisfi alle condizioni (2), senza neppure richiedere, per ora, che a e b debbano essere dello stesso segno, e che G, oltre essere determinata e finita e indipendente da a, debba essere anche diversa da zero.

22. Con ciò noi troveremo dei teoremi generali che nel caso speciale di $\varphi(x\,,h)=\frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x}$ e di a e b numeri positivi che soddisfano alle condizioni dei §§. 17, 18 e 19 si ridurranno a quelli che servono per gli sviluppi delle funzioni in serie trigonometriche; e questi teoremi (alcuni dei quali furono già dati dal sig. Du Bois-Reymond (*) che primo ebbe l' idea di fare studî così generali), oltre a servire, come il sig. Du Bois-Reymond ha mostrato, a rappresentare analiticamente le funzioni per mezzo d'integrali definiti, ci condurranno anche a trovare, e con un metodo uniforme, infiniti sviluppi (in serie di funzioni speciali) per la rappresentazione analitica delle funzioni di una variabile reale date arbitrariamente in dati intervalli.

23. Ciò premesso, incominciamo dal dimostrare che: *se la funzione $\varphi(x\,,h)$ per valori comunque grandi di h e per x compreso nell'intervallo finito (a,b) si mantiene sempre inferiore in valore assoluto a un numero finito φ_0, e, oltre essere atta all'integrazione fra a e b, per tutti i sistemi di valori di a' e b'*

prenda anche valori che crescono indefinitamente con h, altrimenti avendosi $\lim_{h=\infty}\int_a^b \varphi(x\,,h)\,dx=0$ qualunque siano a e b purchè positivi e diversi da zero, sarebbe impossibile che l'integrale $\int_0^a \varphi(x\,,h)\,dx$ (che evidentemente può ridursi alla somma $\int_0^\varepsilon \varphi(x\,,h)\,dx+\int_\varepsilon^a \varphi(x\,,h)\,dx$, con ε arbitrariamente piccolo) avesse un limite G diverso da zero per $h=\infty$.

(*) *Borchardt Journ.* Vol 79.

compresi fra a *e* b (a *e* b *incl.*) *soddisfa alla condizione* $\lim_{h=\infty} \int_{a'}^{b'} \varphi(x, h)dx = 0$, *si avrà*:

$$\lim_{h=\infty} \int_a^b f(x)\, \varphi(x, h)dx = 0\,, \tag{3}$$

tutte le volte che fra a *e* b $f(x)$ *è sempre finita e atta alla integrazione.*

Supponiamo infatti che l' intervallo (a, b) sia scomposto in p intervalli $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_p$ coi punti $a, x_1, x_2, \ldots x_{p-1}, b$. Indicando con f_s un numero compreso fra il limite superiore e inferiore di $f(x)$ fra x_{s-1} e x_s, con D_s l' oscillazione di $f(x)$ in questo intervallo, e con θ_s un numero compreso fra -1 e 1, per la (2) del §. 9 si avrà:

$$\int_{x_{s-1}}^{x_s} f(x)\, \varphi(x, h)dx = f_s \int_{x_{s-1}}^{x_s} \varphi(x, h)dx + \varphi_0 \theta_s \delta_s D_s\,,$$

e quindi sarà:

$$\int_a^b f(x)\, \varphi(x, h)dx = \sum_1^p f_s \int_{x_{s-1}}^{x_s} \varphi(x, h)\, dx + \theta \varphi_0 \sum_1^p \delta_s D_s\,, \tag{4}$$

con θ compreso fra -1 e 1.

Ora la somma $\Sigma\, \delta_s D_s$, quando per p si prenda un numero sufficientemente grande, è numericamente inferiore a quel numero che più ci piace $\frac{\sigma}{\varphi_0}$; e dopo di avere fissato così il numero p, e per quanto grande esso sia, si può prendere poi h così grande che anche al suo accrescersi ulteriormente (con lasciar fermo il p) gli integrali che figurano nella somma $\sum_1^p f_s \int_{x_{s-1}}^{x_s} \varphi(x, h)\, dx$ siano numericamente inferiori a $\frac{\sigma}{\lambda p}$, essendo λ il limite superiore dei valori di $f(x)$ fra a e b; dunque evidentemente al crescere indefinito di h il secondo membro della formola precedente finirà per divenire e restare poi sempre

numericamente inferiore a 2σ, e questo permette appunto di dire che:

$$\lim_{h=\infty}\int_a^b f(x)\,\varphi(x\,,h)dx = 0\,,$$

con che il teorema è dimostrato.

Osservazione. La formola (4) serve anche a trovare un limite superiore dei valori assoluti di $\int_a^b f(x)\,\varphi(x\,,h)\,dx$, poichè ci dà l'altra:

$$\text{val. ass.}\int_a^b f(x)\,\varphi(x\,,h)dx < \lambda\sum_1^p \text{val. ass.}\int_{x_{s-1}}^{x_s}\varphi(x\,,h)dx + \varphi_0\sum_1^p\delta_s D_s\,;$$

e di quì in particolare, nel caso di $\varphi(x\,,h)=\frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x}$, ponendo per a e b (§§. 17, 18 e 19) le condizioni $0<a<b\leq\frac{\pi}{2}$, e osservando che per la formola (23) del §. 17 si ha:

$$\int_{x_{s-1}}^{x_s}\frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x}dx < \frac{\mu\pi}{h\operatorname{sen} x_{s-1}} + \frac{\delta_s}{h\operatorname{sen}^2 x_{s-1}} < \frac{4\pi}{h\operatorname{sen} a} + \frac{\delta_s}{h\operatorname{sen}^2 a}\,,$$

si troverà la seguente:

$$(5)\quad \text{val. ass.}\int_a^b f(x)\frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x}dx < \frac{4p\lambda\pi}{h\operatorname{sen} a} + \frac{\lambda(b-a)}{h\operatorname{sen}^2 a} + \frac{1}{\operatorname{sen} a}\sum_1^p\delta_s D_s\,,$$

nella quale p è il numero degli intervalli in cui bisognerà dividere l'intervallo $(a\,,b)$ per far sì che la somma $\sum_1^p \delta_s\, D_s$ sia di quel grado di piccolezza che più ci piace.

24. Nella formola (3) non si ha alcuna limitazione nè in $f(x)$ nè in $\varphi(x\,,h)$, all'infuori di quelle relative alla integrabilità di $f(x)$, e di quelle generali cui devono sempre soddisfare le funzioni $\varphi(x\,,h)$ che abbiamo detto di prendere in considerazione in questi studii.

A questa formola poi, quando per es. $b>0$, si può aggiungere la seguente:

$$(6)\qquad \lim_{h=\infty}\int_0^b f(x)\,\varphi(x\,,\,h)dx=f(+0)\lim_{h=\infty}\int_0^b \varphi(x\,,h)dx\,,$$

che a causa del teorema del §. 19 nel caso particolare di $\varphi(x\,,h)=\frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x}$, e $0<b\leq\frac{\pi}{2}$ si riduce all'altra:

$$\lim_{h=\infty}\int_0^b f(x)\,\frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x}dx=\frac{\pi}{2}f(+0)\,,$$

che è quella che serve agli sviluppi in serie di Fourier; però per la validità della formola (6), oltre a richiedersi, come è ben naturale, che $f(+0)$ abbia un significato, bisogna porre negli intorni del punto 0 a destra alcune limitazioni per la funzione $f(x)$, a meno che non si pongano per $\varphi(x\,,h)$ altre condizioni speciali oltre a quelle generali indicate sopra.

Indicando infatti con ε un numero fisso diverso da zero e positivo ma piccolo a piacer nostro, si ha:

$$\int_0^b f(x)\,\varphi(x\,,h)dx=\left(\int_0^\varepsilon+\int_\varepsilon^b\right)\{f(x)-f(+0)\}\,\varphi(x\,,h)dx+$$
$$+f(+0)\int_0^b\varphi(x\,,h)dx=\int_0^\varepsilon\{f(x)-f(+0)\}\,\varphi(x\,,h)\,dx+$$
$$+f(+0)\int_0^b\varphi(x\,,h)dx+\int_\varepsilon^b\{f(x)-f(+0)\}\,\varphi(x\,,h)\,dx\,;$$

e siccome pel teorema precedente l'ultimo integrale ha per limite zero si vede subito che, onde sussista la formola precedente, basterà che sia $\lim_{h=\infty}\int_0^\varepsilon\{f(x)-f(+0)\}\,\varphi(x,h)dx=0$, quando ε è piccolo a piacer nostro.

Ora, se ε è preso in modo che per ogni valore di x fra 0 e ε (0 al più escl.) si abbia in valore assoluto

$f(x) - f(+0) < \sigma$, ove σ è un numero positivo arbitrariamente piccolo, si vede subito che il valore assoluto dell'integrale $\int_0^\varepsilon \{f(x)-f(+0)\}\varphi(x,h)dx$ è minore dell' altro $\sigma\int_0^\varepsilon \varphi_1(x\,,h)dx$, ove $\varphi_1(x\,,h)$ è la funzione dei valori assoluti di $\varphi(x,h)$ fra 0 e ε; quindi si può enunciare col sig. Du Bois-Reymond il teorema che dice che: *se la funzione $\varphi(x,h)$ oltre a soddisfare alle solite condizioni generali poste in fine del §. 21, soddisfa anche all'altra che l'integrale $\int_0^\varepsilon \varphi_1(x,h)dx$ della funzione $\varphi_1(x\,,h)$ dei suoi valori assoluti esteso a un intorno $(0\,,\varepsilon)$ a destra del punto 0 resti sempre inferiore a un numero finito anche al crescere indefinito di h, basterà che la funzione $f(x)$ resti finita e atta all'integrazione fra 0 e b e che $f(+0)$ abbia un significato per poter dire che sia:*

$$\lim_{h=\infty} \int_0^b f(x)\,\varphi(x\;,h)dx = f(+0) \lim \int_0^b \varphi(x\;,h)dx\,.$$

Si ha così un teorema che non pone limitazioni per la funzione $f(x)$ nell'intorno a destra del punto 0, ma esso le pone per la funzione $\varphi(x\;,h)$; nè all'infuori di questo si hanno altri teoremi che conservino tale generalità a $f(x)$.

La condizione però che si ha per $\varphi(x,h)$ in questo teorema, per quanto lasci al teorema stesso una importanza e una utilità grandissime, fa sì che esso non torni utile altro che per certi sviluppi in serie della funzione $f(x)$ fra i quali non si trova lo sviluppo di Fourier, perchè per quest'ultimo sviluppo dovrebbe essere $\varphi(x,h)=\frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x}$; quindi, senza più esigere che non debbano esservi limitazioni in $f(x)$ nell'intorno a destra del punto 0, noi passeremo ora a studiare l' integrale $\int_0^\varepsilon \{f(x)-f(+0)\}\,\varphi(x\,,h)dx$ per trovare dei casi in cui la formola (6) sussiste rigorosamente anche quando non si pongano limitazioni nella funzione $\varphi(x\;,h)$, o almeno con limitazioni che

non escludano l' ipotesi $\varphi(x, h) = \frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x}$, onde la formola stessa resti applicabile al caso degli sviluppi in serie di Fourier e di altri sviluppi che noi vogliamo qui considerare.

E osserviamo che quando si sarà trovato un numero θ_h non inferiore al valore assoluto di $\int_0^\varepsilon \{f(x)-f(+0)\}\,\varphi(x,h)dx$, si avrà un limite superiore anche del valore assoluto della differenza $\int_0^b f(x)\,\varphi(x,h)dx - f(+0) \lim_{h=\infty} \int \varphi(x, h)dx$, poichè evidentemente sarà:

$$(7)\ \text{val. ass.}\left\{\int_0^b f(x)\varphi(x, h)dx - f(+0)\lim_{h=\infty}\int_0^b \varphi(x, h)dx\right\} < \theta_h +$$

$$+ \text{ val. ass. } f(+0)\left\{\int_0^b \varphi(x, h)\, dx - \lim \int_0^b \varphi(x, h)dx\right\} +$$

$$+ \text{ val. ass.} \int_\varepsilon^b \{f(x)-f(+0)\}\; \varphi(x, h)dx;$$

e così nel caso particolare di $\varphi(x, h) = \frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x}$ per la (28) del §. 19. e per la (5) del §. 23. si avrà:

$$(8)\qquad \text{val. ass.}\left\{\int_0^b f(x)\frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x} - \frac{\pi}{2}f(+0)\right\} < \theta_h +$$

$$+f_{+0}\left(2\varepsilon^2+2\varepsilon+\frac{8\pi}{h \operatorname{sen}\varepsilon}+\frac{\pi}{h\operatorname{sen}^2\varepsilon}\right)+\frac{4p\pi\lambda_0}{h \operatorname{sen}\varepsilon}+\frac{\lambda_0 b}{h \operatorname{sen}^2\varepsilon}+\frac{1}{\operatorname{sen}\varepsilon}\sum_1^p \delta_s\, D_s,$$

essendo ε il numero piccolo a piacer nostro che abbiamo preso sopra, f_{+0} il valore assoluto di $f(+0)$, e λ_0 il limite superiore dei valori assoluti di $f(x) - f(+0)$ pei valori di x fra 0 e b e pel quale può prendersi anche il numero uguale o maggiore 2λ, e p infine essendo il numero degli intervalli δ_s in cui bi-

sogna dividere l'intervallo (ε, b) o l' intervallo totale $(0, b)$ per fare in modo che la somma corrispondente $\sum_{1}^{p} \delta_s D_s$ venga minore di quel numero che più ci piace.

25. Ciò premesso, prendiamo dunque a studiare l'integrale $\int_0^\varepsilon \{f(x)-f(+0)\}\varphi(x,h)dx$, ove $f(x)$ fra 0 e ε è sempre finita e atta all' integrazione, $f(+0)$ ha un significato, e $\varphi(x,h)$ soddisfa alle solite condizioni generali poste in fine del §. 21; e con queste ipotesi troviamo dei casi in cui questo integrale ha per limite zero per $h=\infty$ dando al tempo stesso caso per caso un valore pel numero indicato ora con θ_h.

Il primo di questi casi sarà quello che corrisponde alle funzioni $f(x)$ che nell'intorno $(0, \varepsilon)$ del punto 0 a destra soddisfano alla condizione che diremo di *Dirichlet;* quella cioè di avere un numero finito q di massimi e minimi fra 0 e ε, o meglio di potersi scomporre l' intervallo $(0, \varepsilon)$ in un numero *finito* q d'intervalli in ciascuno dei quali la funzione $f(x)$ varii sempre in un senso o resti costante.

In questo caso infatti indicando con $\rho(x)$ la funzione $f(x)-f(+0)$, con $(0, \varepsilon_1), (\varepsilon_1, \varepsilon_2), (\varepsilon_{q-1}, \varepsilon)$ i q intervalli nei quali supponiamo scomporsi l' intervallo $(0, \varepsilon)$ per la funzione $f(x)$ e quindi anche per la $\rho(x)$, e con $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_q$ dei numeri determinati compresi in questi intervalli respettivamente, basta applicare a ciascun intervallo $(\varepsilon_s, \varepsilon_{s+1})$ la formola (3) del §. 9. per ottenere subito:

$$\int_0^\varepsilon \{f(x)-f(+0)\}\varphi(x,h)dx = \rho(\varepsilon_1-0)\int_{\tau_1}^{\varepsilon_1} \varphi(x, h)\, dx +$$

$$+ \rho(\varepsilon_1+0)\int_{\varepsilon_1}^{\tau_2} \varphi(x, h)dx + \rho(\varepsilon_2-0)\int_{\tau_2}^{\varepsilon_2} \varphi(x,h)dx + \ldots +$$

$$+ \rho(\varepsilon_{q-1}+0)\int_{\varepsilon_{q-1}}^{\tau_q} \varphi(x, h)dx + \rho(\varepsilon-0)\int_{\tau_q}^{\varepsilon} \varphi(x, h)dx,$$

ove $\rho(\varepsilon_1-0)$, $\rho(\varepsilon_1+0)$ . . . . hanno certamente un significato perchè $\rho(x)$ fra 0 e ε ha un numero finito di oscillazioni; quindi se supponiamo che per x compresa fra 0 e ε (0 al più escl.) si abbia sempre $f(x)-f(+0)<\sigma$, e oltre a ciò poniamo la condizione che l'integrale $\int_0^x \varphi(x, h)dx$ per ogni valore di x compreso fra 0 e ε e qualunque sia h resti sempre numericamente inferiore a un numero finito A, basterà osservare in generale che $\int_\alpha^\beta = \int_0^\beta - \int_0^\alpha$, per concludere subito che:

$$\text{val. ass.} \int_0^\varepsilon \{f(x)-f(+0)\} \varphi(x, h)dx < (4q-2)A\sigma\,;$$

e questo ci permette intanto di dire che „ la formula (6) sus-
„ siste sempre quando fra 0 e b la funzione $f(x)$ è atta alla
„ integrazione, e nell'intorno $(0, \varepsilon)$ del punto 0 a destra, essa
„ fa soltanto un numero finito di oscillazioni, e la funzione
„ $\varphi(x, h)$ è tale che, oltre a soddisfare alle solite condizioni
„ generali, soddisfa anche a quella che l'integrale $\int_0^x \varphi(x, h)dx$
„ pei valori di x fra 0 e ε e qualunque sia h si mantiene sem-
„ pre numericamente inferiore a un numero finito A „.

Si può poi aggiungere che in questo caso si ha $\theta_h<(4q-2)A\sigma$; e se $\varphi(x, h)=\frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x}$, osservando che allora la condizione posta quì per $\varphi(x, h)$ è soddisfatta (§. 18), e può prendersi $A=\pi$, si potrà senz'altro asserire che quando $f(x)$ fra 0 e ε fa soltanto un numero finito q di oscillazioni, oltre ad aversi per $0<b\leq\frac{\pi}{2}$:

$$\lim_{h=\infty} \int_0^\varepsilon f(x)\frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x} = \frac{\pi}{2} f(+0), \quad \text{e} \quad \theta_h<(4q-2)\pi\sigma,$$

si ha altresì per la (8):

$$(9)\quad \text{val. ass.}\left\{\int_0^b f(x)\frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x}dx-\frac{\pi}{2}f(+0)\right\}<(4q-2)\pi\sigma+$$

$$+f_{+0}\left(2\varepsilon^2+2\varepsilon+\frac{8\pi}{h\operatorname{sen}\varepsilon}+\frac{\pi}{h\operatorname{sen}^2\varepsilon}\right)+\frac{4p\pi\lambda_0}{h\operatorname{sen}\varepsilon}+\frac{\lambda_0 a}{h\operatorname{sen}^2\varepsilon}+\frac{1}{\operatorname{sen}\varepsilon}\sum_1^p \delta_s D_s .$$

26. Se poi la funzione $f(x)$ fra 0 e ε ha un numero infinito di massimi e minimi, ma è sempre continua e viene a perdere tutti questi massimi e minimi coll'aggiungervi una funzione di primo grado $\mu x+\nu$, o più semplicemente μx, allora la formola (6) continuerà ancora a sussistere sotto le stesse condizioni relativamente a $\varphi(x, h)$; e siccome sarà:

$$\int_0^\varepsilon \{f(x)-f(+0)\}dx=\int_0^\varepsilon\{f(x)-\mu x-f(+0)\}\varphi(x,h)dx+\mu\int_0^\varepsilon x\varphi(x,h)dx$$

avremo $\theta_h \leq 2\,A(\sigma+\mu\varepsilon)+2A\mu\varepsilon<4\,A(\sigma+\mu\varepsilon)$, e nella formola (9) basterà sostituire $4\pi(\sigma+\mu\varepsilon)$ al termine $(4q-2)\pi\sigma$.

27. Supponendo ora che la funzione $\varphi(x, h)$ sia tale che il prodotto $x^\nu\varphi(x, h)$ anche al crescere indefinito di h si mantenga inferiore a un numero finito A_1, ciò che non esclude l'ipotesi $\varphi(x, h)=\frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x}$, poichè basta allora supporre $\nu\geq 1$, si osserverà che:

$$\int_0^\varepsilon \{f(x)-f(+0)\}\varphi(x, h)dx=\int_0^\varepsilon \frac{f(x)-f(+0)}{x^\nu}\, x^\nu\varphi(x, h)dx,$$

e si concluderà quindi che la formola (6) sussisterà sempre quando fra 0 e ε il prodotto $x^\nu\varphi(x, h)$ col crescere indefinito di h non superi mai un numero finito A_1, e col tendere di x a zero il rapporto $\frac{f(x)-f(+0)}{x^\nu}$ non cresca indefinitamente, o se cresce indefinitamente resti atto all'integrazione anche ridotto ai valori assoluti, come per es. accade quando non è di ordine superiore a quello di una delle funzioni:

$$(10) \qquad \frac{1}{x^{\mu}}\,,\ \frac{1}{x(lx)^{1+\mu}}\,,\ \frac{1}{x\,lx(l^2x)^{1+\mu}}\,,\ \ldots$$

nella prima delle quali μ è positivo e minore d' uno, e nelle altre μ è semplicemente diverso da zero e positivo.

In particolare dunque „ la formola (6) sussisterà se il „ prodotto $x\varphi(x,h)$ per x fra 0 e ε non supera mai un numero „ finito A_1 e se, considerando $f(x)$ come continua nel punto „ $x=0$ e uguale a $f(+0)$, il suo rapporto incrementale destro „ $\frac{f(x)-f(+0)}{x}$ non cresce indefinitamente al tendere a zero di „ x, o almeno se crescendo indefinitamente resta atto all'inte- „ grazione anche ridotto ai suoi valori assoluti „. E supposto al solito in particolare che si abbia $\varphi(x\,,h)=\frac{\text{sen}\,hx}{\text{sen}\,x}$, e che $\frac{f(x)-f(+0)}{x}$ non divenga infinito per $x=+0$ di ordine superiore a quello di $\frac{1}{x\,lx\,l^2x\ldots(l^{\nu}x)^{1+\mu}}$, sarà:

$$\theta_h \leq \int_0^{\varepsilon} \frac{dx}{x\,lx\,l^2x\ldots(l^{\nu}x)^{1+\mu}}$$

ovvero:

$$\theta_h < -\frac{1}{\mu(l^{\nu}\varepsilon)^{\mu}}\,,$$

almeno per ε sufficientemente piccolo, e sostituendo nella (7) si avrà un limite superiore del valore assoluto della differenza $\int_0^b f(x)\frac{\text{sen}\,hx}{\text{sen}\,x}dx - \frac{\pi}{2}f(+0)$.

28. Supposto che $\alpha_1\,,\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}$ siano i punti di massimo successivi dell' integrale $\int_0^x \varphi(x\,,h)\,dx$ per x compreso fra 0 e ε (0 e ε escl.), o siano i punti di minimo, e questi valori massimi o minimi dell' integrale siano tutti dello stesso segno, e non vadano mai crescendo o non vadano mai decre-

scendo in valore assoluto (*) e supposto sempre che fra 0 e ε si abbia in valore assoluto $f(x) - f(+0) < \sigma$, le formole del §. 10. applicate all' integrale $\int_0^\varepsilon \{ f(x) - f(+0) \} \varphi(x, h)\, dx$ ci mostrano che l' integrale stesso sarà numericamente inferiore a $2\sigma A + \sigma \int_{\alpha_{n-1}}^\varepsilon \varphi_1(x, h)\, dx + \sum_0^{n-2} D_s \int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}} \varphi_1(x, h)\, dx$, o anche a:

$$(a) \quad 2\sigma A + \sigma \left(\int_0^{\alpha_1} + \int_{\alpha_{n-1}}^\varepsilon \right) \varphi_1(x, h)\, dx + \sum_1^{n-2} D_s \int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}} \varphi_1(x, h)\, dx,$$

indicando con $\varphi_1(x,h)$ la funzione dei valori assoluti di $\varphi(x,h)$, con D_s l' oscillazione di $f(x)$ negli intervalli (α_s, α_{s+1}), e con A un numero finito di cui si suppone che siano sempre inferiori i valori assoluti dell'integrale $\int_0^x \varphi(x,h) dx$ pei valori di x fra 0 e ε e per qualsiasi valore finito di h.

Ma supponendo per es. che $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_{n-1}$ siano i punti di massimo dell' integrale $\int_0^x \varphi(x,h) dx$, e indicando in generale con α'_s il punto di minimo fra α_s e α_{s+1}, si osservi che $\varphi(x, h)$ da α_s a α'_s non sarà mai positiva e da α'_s a α_{s+1} non sarà mai negativa, o almeno i valori positivi che prendesse nel primo intervallo e i negativi che prendesse nel secondo non avranno influenza sull' integrale, e quindi sarà:

$$\int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}} \varphi_1(x, h)\, dx = - \int_{\alpha_s}^{\alpha'_s} \varphi(x, h)\, dx + \int_{\alpha'_s}^{\alpha_{s+1}} \varphi(x, h)\, dx;$$

e se $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_{n-1}$ saranno i punti di minimo dell' integrale

(*) Si suppone sempre in questi studi che fra 0 e ε l' integrale $\int_0^x \varphi(x,h)\, dx$ per ogni valore finito di h abbia soltanto un numero finito di massimi e di minimi.

$\int_0^x \varphi(x, h)\, dx$, e α'_s sarà il punto di massimo fra α_s e α_{s+1}, questa formola sussisterà ancora quando si cangino soltanto i segni degli integrali del secondo membro.

Si dedurrà da ciò che nella espressione (a) gli integrali $\int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}}$, $\int_0^{\alpha_1}$, $\int_{\alpha_{n-1}}^{\varepsilon}$ saranno sempre numericamente inferiori a $4A$; e propriamente potrebbe anche dirsi che il secondo di essi non supererà mai $3A$, e non supererà neppure A quando l'integrale $\int_0^x \varphi(x, h)\, dx$ fra 0 e α_1 varierà sempre nello stesso senso; talchè intanto può dirsi che i primi due termini della espressione (a) sono inferiori a $10\, A\, \sigma$, e l'ultimo è inferiore a $4 \Sigma D_s$.

Di quì risulterebbe subito un altro caso di validità della formola (6); ma ora, riservandoci di tornarvi sopra fra breve, studieremo in altro modo l'ultimo termine della espressione (a).

Osserveremo perciò che aggiungendo l'ipotesi che il prodotto $x \varphi(x,h)$ per qualsiasi valore di h e di x resti sempre numericamente inferiore a un certo numero finito B, e indicando con D_h la massima oscillazione di $f(x)$ negli intervalli (α_s, α_{s+1}) si vede subito che l'ultimo termine della (a) è inferiore a $B D_h \int_{\alpha_1}^{\varepsilon} \frac{dx}{x}$, ovvero a $BD_h \log \varepsilon - BD_h \log \alpha_1$; talchè ammettendo che $f(x)$ sia continua fra 0 e ε (0 al più escl.), e ammettendo anche che i punti $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_{n-1}$ si avvicinino fra loro indefinitamente col crescere di h in modo che le loro distanze $\alpha_{s+1} - \alpha_s$ finiscano per essere minori di quel numero che più ci piace, ma tali però da essere sempre dello stesso ordine di piccolezza di α_1 (*), si vede chiaro che a partire da un certo valore di h in poi l'integrale $\int_0^{\varepsilon} \{f(x) - f(+0)\} \varphi(x, h)\, dx$

(*) Ciò equivale a dire che i rapporti $\frac{\alpha_{s+1} - \alpha_s}{\alpha_1}$ devono esser sempre inferiori a un certo numero finito p e discosti da zero più di un numero dato q.

sarà numericamente inferiore a quel numero che più ci piace tutte le volte che il prodotto $D_s \log(\alpha_{s+1} - \alpha_s)$ potrà rendersi piccolo a piacere; dunque, osservando anche che ε può supporsi piccolo quanto si vuole, si potrà ora evidentemente asserire che „ se l' integrale $\int_0^x \varphi(x, h)\, dx$ e il prodotto $x\,\varphi(x, h)$ si
„ mantengono sempre numericamente inferiori a numeri finiti
„ A e B, e lo stesso integrale nei suoi punti di massimo (o di
„ minimo) $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_{n-1}$ fra 0 e ε ha sempre lo stesso segno e non
„ và mai crescendo o non và mai decrescendo, e questi punti si av-
„ vicinano indefinitamente al crescere di h, ma in modo però che
„ le differenze $\alpha_{s+1} - \alpha_s$ si mantengano sempre dell'ordine di pic-
„ colezza di α_1, allora la formola (6) sarà applicabile, e si avrà:

$$\theta_h < 10\, A\, \sigma + B\, D_h \log \varepsilon + B\, \sigma_1\,,$$

„ tutte le volte che nei punti di un intorno a destra del punto
„ zero (0 al più escl.) la funzione $f(x)$ è sempre continua, e
„ oltre a ciò è tale che per ogni numero comunque piccolo σ_1
„ si può trovare un intorno $(0, \varepsilon)$ dotato della proprietà che
„ in ogni intervallo δ preso in esso, il prodotto $D_\delta \log \delta$ del-
„ l'oscillazione D_δ della funzione moltiplicata per il logaritmo
„ $\log \delta$ dell' intervallo δ corrispondente sia sempre minore di
„ σ_1 „. [S'intende che nel calcolo delle oscillazioni D_δ relative agli intervalli δ che terminano al punto zero si dovrà prendere $f(+0)$ come valore della funzione in questo punto].

In particolare dunque se $\varphi(x, h) = \dfrac{\operatorname{sen} h\, x}{\operatorname{sen} x}$, le condizioni poste per $\varphi(x, h)$ saranno soddisfatte, e si potrà prendere $A = \pi$, $B = 1 + \varepsilon$; quindi si può dire che „ si avrà;

$$\lim_{h=\infty} \int_0^b f(x) \frac{\operatorname{sen} h\, x}{\operatorname{sen} x}\, dx = \frac{\pi}{2} f(+0)\,,$$

„ tutte le volte che negli intorni a destra del punto zero (0 al
„ più escl.) la funzione $f(x)$ è continua, e per ogni numero
„ comunque piccolo σ_1 esiste un intorno $(0, \varepsilon)$ tale che in ogni

„ intervallo δ preso in esso si abbia in valore assoluto
„ $D_\delta \log \delta < \sigma_1$, essendo D_δ l'oscillazione di $f(x)$ nell'inter-
„ vallo δ „. In questo caso poi si potrà scrivere:

$$0_h < 10\,\pi\sigma + 2\,(1+\varepsilon)\sigma_1\,,$$

e con questo valore di 0_h la (8) ci darà un limite superiore del valore assoluto della differenza $\int_0^b f(x)\frac{\text{sen}\,hx}{\text{sen}\,x}dx - \frac{\pi}{2}f(+0)$.

Questo risultato pel caso di $\varphi(x\,,h) = \frac{\text{sen}\,hx}{\text{sen}\,x}$ può dirsi dovuto a Lipschitz (*); e sì in questo caso particolare, che in quello generale di $\varphi(x\,,h)$ qualunque, esso non rientra sempre in quello del §. precedente perchè, bastando nel caso attuale che si abbia $D_\delta \log \delta < \sigma_1$, potrà anche darsi che questa condizione sia soddisfatta, e il rapporto $\frac{f(x)-f(+0)}{x}$ sia infinito d'ordine superiore o uguale a quello di una delle funzioni $\frac{1}{x\,lx\,l^2x}$, $\frac{1}{x\,lx\,l^2x\,l^3x}$, ..

29. Come accennammo nel paragrafo precedente, avendo ivi dimostrato che l'espressione (a) è inferiore a $10\,A\,\sigma + 4\,A\,\Sigma\,D_s$, avremmo senz'altro potuto concludere che „ la formola (6) è ap-
„ plicabile alla funzione $f(x)$ quando per ogni numero comunque
„ piccolo σ_1 si può trovare un intorno $(0\,,\varepsilon)$ del punto zero a
„ destra dotato della proprietà che anche scomponendolo in in-
„ tervalli piccoli a piacere $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p$ la somma $\Sigma\,D_s$ delle
„ oscillazioni corrispondenti D_s è sempre inferiore a σ_1; (come
„ avviene per es. se in ogni intervallo δ preso fra 0 e ε si ha
„ $D_\delta < c\,\delta$, con c sempre inferiore a un certo numero finito) „.
Giova però dimostrare in altro modo questo teorema, perchè allora non si hanno per $\varphi(x\,,h)$ tutte le condizioni poste in principio del paragrafo precedente, ma basta che, oltre alle solite condizioni generali, sia posta l'altra che si ha in tutti i

(*) Lipschitz propriamente, invece della condizione $D_\delta \log \delta < \sigma_1$, dette l'altra più restrittiva $D_\delta < c\,\delta^\nu$ con ν positivo qualunque (Borchardt. Iourn. Bd. 63).

casi; quella cioè che l' integrale $\int_0^x \varphi(x, h)\,dx$ sia sempre numericamente inferiore ad A.

Indichiamo perciò con $\rho(x)$ la differenza $f(x) - f(+0)$, e con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ i punti successivi di massimo o di minimo dell' integrale $\int_0^x \varphi(x, h)\,dx$ fra 0 e ε (0 e ε escl.) per es. quelli di massimo. Si avrà:

$$(b) \int_0^\varepsilon \{f(x)-f(+0)\}\, \varphi(x, h)dx = \left(\int_0^{\alpha_1} + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} + \ldots + \int_{\alpha_{n-1}}^{\varepsilon}\right) \rho(x)\varphi(x, h)\,dx,$$

e se β_s è il punto di minimo fra α_s e α_{s+1}, la funzione $\varphi(x, h)$, all'infuori tutt'al più di una funzione d'integrale nullo, fra α_s e β_s è sempre negativa, e fra β_s e α_{s+1} è sempre positiva, e quindi avremo:

$$\int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}} \rho(x)\varphi(x,h)dx = \rho_s \int_{\alpha_s}^{\beta_s} \varphi(x,h)dx + \rho'_s \int_{\beta_s}^{\alpha_{s+1}} \varphi(x, h)\,dx =$$

$$= \rho_s \left(\int_0^{\beta_s} - \int_0^{\alpha_s}\right) \varphi(x, h)dx + \rho'_s \left(\int_0^{\alpha_{s+1}} - \int_0^{\beta_s}\right) \varphi(x, h)\,dx,$$

essendo ρ_s e ρ'_s numeri compresi fra i limiti inferiori e superiori di $\rho(x)$ negli intervalli (α_s, β_s), (β_s, α_{s+1}); e una formola analoga si avrà per gli integrali da 0 a α_1 e da α_{n-1} a ε.

Sostituendo ora nella espressione precedente (b), il secondo membro si ridurrà a una somma di prodotti $(\rho'_{s-1} - \rho_s) \int_0^{\alpha_s} \varphi(x,h)dx$, e $(\rho_s - \rho'_s) \int_0^{\beta_s} \varphi(x, h)\,dx$, e di più vi sarà un termine che sarà il prodotto di ρ_{n-1} o ρ'_{n-1} per l' integrale $\int_0^\varepsilon \varphi(x, h)dx$; dunque, poichè le differenze $\rho'_{s-1} - \rho_s$ o $\rho_s - \rho'_s$ non superano le oscillazioni che si hanno da 0 a β_1, da β_1 a $\beta_2, \ldots$, o da 0 a α_1, da α_1 a $\alpha_2, \ldots$, si vede chiaro che, se fra 0 e ε si ha $f(x) - f(+0) < \sigma$,

sarà $\theta_h < \Lambda(\sigma + 2\Sigma D_s)$, ovvero $\theta_h < \Lambda(\sigma + 2\sigma_1)$, e questo dimostra il teorema.

30. Seguendo il processo del § 28 è facile trovare altri casi di validità della formola (6).

S'immagini perciò scomposta la funzione $f(x) - f(+0)$ nel prodotto $\alpha(x)\beta(x)$ delle due funzioni $\alpha(x)$, $\beta(x)$, per modo che il primo membro della (6) si riduca all'integrale $\int_0^\varepsilon \alpha(x)\beta(x)\varphi(x,h)dx$; e per quanto in questo integrale il prodotto $\alpha(x)\beta(x)$ tenderà a zero con x, studiamolo dapprima indipendentemente da questa condizione.

Supponiamo perciò che $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ siano i punti di massimo o quelli di minimo successivi dell' integrale $\int_0^x \varphi(x,h)dx$ compresi fra 0 e ε (0 e ε escl.), e per esso come per $\varphi(x,h)$ siano soddisfatte le varie condizioni del teorema del §. 28, tranne tutt'al più quella che i rapporti $\frac{\alpha_{s+1} - \alpha_s}{\alpha_s}$ debbano restare sempre discosti da zero più di un certo numero q.

Per le formole del §. 10, avremo:

$$\int_0^\varepsilon \alpha(x)\beta(x)\varphi(x,h)dx = \theta D A + \int_0^{\alpha_1} \{\alpha(x)\beta(x) - \gamma_0\}\varphi(x,h)dx +$$

$$+ \int_{\alpha_{n-1}}^\varepsilon \alpha(x)\beta(x)\varphi(x,h)dx + \sum_1^{n-2} \int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}} \{\alpha(x)\beta(x) - \alpha(\alpha_s)\beta(\alpha_s)\}\varphi(x,h)dx$$

ove θ è un numero compreso fra -1 e 1, D è l' oscillazione di $\alpha(x)\beta(x)$ fra 0 e ε, e γ_0 è il valore che ha $\alpha(x)\beta(x)$, o che gli si attribuisce, nel punto $x=0$.

Ora, poichè il primo integrale è evidentemente inferiore a $D\int_0^{\alpha_1} \varphi_1(x,h)dx$, mentre il secondo è inferiore a $\mu \int_{\alpha_{n-1}}^\varepsilon \varphi_1(x,h)dx$, ove μ è il limite superiore dei valori assoluti di $\alpha(x)\beta(x)$ fra

0 e ε, si vede subito come al §. 28. che gl' integrali stessi sono inferiori a 3 A D, e 4 A μ respettivamente.

Rispetto poi all' integrale che figura sotto il segno $\sum$ si può osservare che si ha:

$\alpha(x)\,\beta(x) - \alpha(\alpha_s)\,\beta(\beta_s) = \{\alpha(x) - \alpha(\alpha_s)\}\,\beta(x) + \alpha(\alpha_s)\{\beta(x) - \beta(\beta_s)\}$,

e se $\beta(x)$ fra α_1 e ε è finita e continua e λ_β è il suo estremo oscillatorio, siccome si potrà anche scrivere (*m. l.* §. 198) $\beta(x) - \beta(\beta_s) = (x - \beta_s)\,\lambda_s$, ove λ_s è un numero compreso fra i limiti inferiori e superiori di $\lambda\beta$ nell'intervallo (α_s, x), si avrà:

$$\sum_1^{n-2}\int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}}\{\alpha(x)\,\beta(x) - \alpha(\alpha_s)\beta(\alpha_s)\}\,\varphi(x, h)\,dx = \sum_1^{n-2}\int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}}\{\alpha(x) - \alpha(\alpha_s)\}\,\beta(x)\,\varphi(x, h)\,dx +$$

$$+\sum_1^{n-2}\int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}}\alpha(\alpha_s)\,\lambda_s\,(x - \alpha_s)\,\varphi(x, h)\,dx.$$

Ora, se $\beta(x)$ fra 0 e ε è sempre finita e il limite superiore dei suoi valori assoluti è β', e la funzione $\alpha(x)$ non è mai decrescente o non è mai crescente, l' integrale

$\int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}}\{\alpha(x) - \alpha(\alpha_s)\}\,\beta(x)\varphi(x, h)\,dx$ non supererà in valore assoluto

quello della quantità $\beta'\{\alpha(\alpha_{s+1}) - \alpha(\alpha_s)\}\int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}}\varphi_1(x, h)\,dx$, la quale

per quanto si vide al §. 28 non supera $4\,\mathrm{A}\,\beta'\{\alpha(\alpha_{s+1}) - \alpha(\alpha_s)\}$; dunque la somma di questi integrali non supererà, in valore assoluto, quello della quantità $4\,\mathrm{A}\,\beta'\{\alpha(\varepsilon) - \alpha(\alpha_1)\}$, e quindi, per ε sufficientemente piccolo, essa sarà piccola a piacere.

Passando ora agli integrali $\int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}}\alpha(\alpha_s)\lambda_s(x - \alpha_s)\varphi(x, h)\,dx$, col-

l'ammettere che fuori del punto zero λ_β sia sempre finito, osserviamo che se $\alpha(x)$ è sempre positiva fra 0 e ε, e λ^0_s è il limite superiore dei valori assoluti di λ_β fra α_s e α_{s+1}, gli stessi in-

tegrali sono numericamente inferiori a $\frac{\alpha(\alpha_s)\,\lambda^0{}_s(\alpha_{s+1}-\alpha_s)^2\,B}{2\alpha_s}$, e quindi la loro somma sarà inferiore in valore assoluto a $\frac{B}{2}\sum \alpha(\alpha_s)\,\lambda^0{}_s\,\alpha_s\left(\frac{\alpha_{s+1}-\alpha_s}{\alpha_1}\right)^2\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_s}\right)^2$, ove B è un numero positivo di cui è sempre numericamente inferiore il prodotto $x\,\varphi(x\,,h)$.

Ma, per le ipotesi fatte sui numeri $\alpha_1\,,\alpha_2\,,\ldots\,\alpha_{n-1}$, i rapporti $\frac{\alpha_{s+1}-\alpha_s}{\alpha_1}$ sono tutti inferiori al numero finito p, quindi la stessa somma sarà inferiore a $\frac{B\,p^2}{2}\sum \alpha(\alpha_s)\,\lambda^0{}_s\,\alpha_s\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_s}\right)^2$, e questo evidentemente ci mostra che se il prodotto $\alpha(\alpha_s)\,\lambda^0{}_s\,\alpha_s$ non supererà mai un certo numero finito C, e la somma $\sum\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_s}\right)^2$ anche al crescere indefinito di h si manterrà inferiore a un numero finito k [come avviene per es. nel caso di $\varphi(x\,,h)=\frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x}$, perchè allora si ha $\alpha_s=(2\,s-1)\,\alpha_1$], la somma degli integrali $\int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}}\alpha(\alpha_s)\,\lambda_s(x-\alpha_s)\,\varphi(x\,,h)\,dx$ sarà numericamente inferiore a $\frac{B\,C\,p^2}{2}\sum\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_s}\right)^2$, o a $\frac{B\,C\,k\,p^2}{2}$.

Ma è chiaro che se vi saranno degli intervalli $(\alpha_s\,,\alpha_{s+1})$ nei quali λ_β non diviene effettivamente uguale in valore assoluto a $\lambda^0{}_s$, indicando con λ'_s un valore che sia fra i valori assoluti che vengono effettivamente presi da λ_β nell'intervallo indicato si avrà:

$$\frac{Bp^2}{2}\sum \alpha(\alpha_s)\lambda^0{}_s\alpha_s\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_s}\right)^2=\frac{Bp^2}{2}\sum\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_s}\right)^2\alpha(\alpha_s)\lambda'_s\alpha_s+$$
$$+\frac{Bp^2}{2}\sum\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_s}\right)^2\alpha(\alpha_s)(\lambda^0{}_s-\lambda'_s)\alpha_s,$$

e evidentemente si potrà supporre λ'_s talmente vicino a $\lambda^0{}_s$ che il secondo termine del secondo membro sia sempre di

quel grado di piccolezza che più ci piace indipendentemente da h; dunque, poichè se ξ_s è il valore di x fra α_s e α_{s+1} pel quale $\lambda_\beta = \pm \lambda'_s$, e se $\alpha(x)$ da 0 a ε è positiva e non è decrescente, si ha $\alpha(\alpha_s)\alpha_s < \alpha(\xi_s)\,\xi_s$, e $\alpha(\alpha_s)\,\lambda'_s\,\alpha_s \leq \alpha(\xi_s)\,\lambda'_s\,\xi_s$, si può affermare che, sotto le varie ipotesi che abbiamo fatto, basterà che il prodotto $\alpha(x)\,x\,\lambda_\beta$ col tendere a zero di x non superi mai in valore assoluto il numero C per poter dire che la somma degli integrali $\int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}} \alpha(\alpha_s)\,\lambda_s\,(x-\alpha_s)\,\varphi(x\,,h)\,dx$ sarà sempre numericamente inferiore a $\frac{\mathrm{B\,C}kp^2}{2}$, e in valore assoluto si avrà:

$$(10)\quad \int_0^\varepsilon \alpha(x)\beta(x)\,\varphi(x,h)dx < 4\left\{\mathrm{D}+\mu+\beta'[\alpha(\varepsilon)-\alpha(+0)]\right\}\left\{\mathrm{A}+\frac{\mathrm{B\,C}kp^2}{2}\right\}.$$

Se poi $\alpha(x)$ da 0 a ε, essendo ancora positiva, non sarà crescente, la quantità $\alpha(+0)$ non sarà certo uguale a zero a meno che non fosse sempre $\alpha(x)=0$, il che è da escludersi; e quindi se ε è preso sufficientemente piccolo, $\alpha(x)$ fra 0 e ε, oltre essere positiva, sarà sempre diversa da zero. Ma allora si avrà: $\alpha(\alpha_s)\,\lambda'_s\,\alpha_s \leq \frac{\alpha(\alpha_s)}{\alpha(\xi_s)}\,\alpha(\xi_s)\,\lambda'_s\,\xi_s \leq \frac{\alpha(+0)}{\alpha(\varepsilon)}\,\alpha(\xi_s)\,\lambda'_s\,\xi_s$, e quindi quando sia soddisfatta la condizione precedente relativa al prodotto $\alpha(x)\,x\,\lambda_\beta$ si avranno ancora gli stessi risultati che sopra, salvo a sostituire nella formola precedente a $\alpha(\varepsilon)-\alpha(+0)$ il suo valore assoluto, e a C il prodotto $\mathrm{C}\,\frac{\alpha(+0)}{\alpha(\varepsilon)}$; dunque, poichè evidentemente nel caso di $\alpha(x)$ negativo basta considerare l'integrale $-\int_0^\varepsilon \alpha(x)\,\beta(x)\,dx$ per ricadere subito nel caso precedente, riassumendo si potrà ora affermare che: „ quando la „ funzione $\varphi(x\,,h)$ soddisfa a tutte le condizioni poste nel „ paragrafo precedente ed è tale altresì che, se $\alpha_1\,,\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}$

„ sono i punti di massimo successivi dell'integrale $\int_0^x \varphi(x,h)\,dx$
„ fra 0 e ε, o sono i punti di minimo, i rapporti $\frac{\alpha_{s+1}-\alpha_s}{\alpha_1}$
„ restino sempre inferiori a un certo numero finito p, e la
„ somma $\sum_1 \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_s}\right)^2$ anche al crescere indefinito di h si mantenga
„ sempre inferiore a un numero pure finito k; allora se fra 0 e ε
„ $\alpha(x)$ è una funzione sempre finita e senza oscillazioni, e $\beta(x)$
„ è anch'essa finita, l'integrale $\int_0^\varepsilon \alpha(x)\,\beta(x)\,\varphi(x,h)dx$ potrà non
„ avere un limite determinato al crescere indefinito di h, ma
„ non supererà mai in valore assoluto un numero finito tutte le
„ volte che fra 0 e ε (0 al più escl.) $\beta(x)$ è continua e ha un estre-
„ mo oscillatorio λ_β sempre finito e tale che il prodotto $\alpha(x).x\lambda_\beta$
„ non supera in valore assoluto un certo numero finito C; e in
„ questo caso si avrà la formola (10) nella quale però, se $\alpha(x)$ non
„ è crescente in valore assoluto da 0 a ε, a C deve sostituirsi
„ C $\frac{\alpha(+0)}{\alpha(\varepsilon)}$, e s'intende sempre che per $\alpha(\varepsilon)-\alpha(+0)$ debba
„ prendersi il valore assoluto di questa differenza „.

Si può inoltre aggiungere che la condizione relativa alla somma $\sum_1 \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_s}\right)^2$ è sempre soddisfatta quando, come nel caso di $\varphi(x,h)=\frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x}$, le differenze $\alpha_{s+1}-\alpha_s$ sono dello stess' ordine di piccolezza di α_1, per modo cioè che i rapporti $\frac{\alpha_{s+1}-\alpha_s}{\alpha_1}$, oltre a restar sempre inferiori a un numero finito p, non si accostano a zero più di un certo numero q; perchè allora, ponendo $\frac{\alpha_s}{\alpha_1}=q_s$, le differenze $q_{s+1}-q_s=\frac{\alpha_{s+1}-\alpha_s}{\alpha_1}$ non saranno mai inferiori a q, e siccome si ha per $t \geq 1$:

$$\sum_{t+1}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_s}\right)^2=\frac{1}{q_{t+1}{}^2}+\frac{1}{q_{t+2}{}^2}+\ldots<\frac{1}{q_t\,q_{t+1}}+\frac{1}{q_{t+1}\,q_{t+2}}+\ldots,$$

ovvero:

$$\sum_{t+1}^{\infty}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_s}\right)^2<\frac{1}{q_{t+1}-q_t}\left(\frac{1}{q_t}-\frac{1}{q_{t+1}}\right)+\frac{1}{q_{t+2}-q_{t+1}}\left(\frac{1}{q_{t+1}}-\frac{1}{q_{t+2}}\right)+\ldots,$$

sarà:

$$\sum_{t+1}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_s}\right)^2<\frac{1}{q\,q_t},$$

e in particolare si avrà $\sum_{1}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_s}\right)^2=1+\sum_{2}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_s}\right)^2<1+\frac{1}{q}$, talchè si vede anche che in questo caso nelle formole precedenti a k può sostituirsi $1+\frac{1}{q}$ o $\frac{q+1}{q}$.

31. In particolare poi si può dire che „ se
„ $f(x)=f(+0)+\alpha(x)\,\beta(x)$, e $f(x)$ è atta alla integrazione fra
„ 0 e ε come sempre abbiamo supposto, la formola (6) sarà ap-
„ plicabile tutte le volte che la funzione $\varphi(x\,,h)$ soddisfa alle
„ condizioni del paragrafo precedente e al tempo stesso $\alpha(x)$
„ fra 0 e ε è finita e non fà oscillazioni, e $\beta(x)$ è pur sempre fi-
„ nita, e in ogni intervallo fra 0 e ε che non termina al punto zero
„ è anche continua e ha un estremo oscillatorio λ_β tale che il
„ prodotto $\alpha(x)\,x\,\lambda_\beta$ ha per limite zero per $x=+0$; e in questo
„ caso se fra 0 e ε si ha $f(x)-f(+0)<\sigma$, e $\alpha(x)\,x\,\lambda_\beta<\sigma_1$,
„ si potrà anche scrivere:

$$\int_0^\varepsilon\{f(x)-f(+0)\}\varphi(x,h)dx<2\{5\sigma+2\beta'[\alpha(\varepsilon)-\alpha(+0)]\}A+p_0\frac{Bkp^2}{2}\sigma_1,$$

„ ove $p_0=1$, o $=\frac{\alpha(+0)}{\alpha(\varepsilon)}$ nei casi indicati sopra „.

E quando $\alpha(x)$ sia continua fra 0 e ε ma abbia un numero infinito di oscillazioni, allora se $\varphi(x\,,h)$ soddisfarà sempre alle

condizioni precedenti e il prodotto $\alpha(x)\, x\, \lambda_\beta$ avrà per limite zero per $x=+0$, la formola (6) continuerà ancora a sussistere, purchè anche il prodotto $x^2 \lambda_\beta$ abbia per limite zero per $x=+0$, e $\alpha(x)$ perda tutti i massimi e minimi coll'aggiungervi una conveniente funzione di primo grado.

È degno di nota che sotto questa forma generale il teorema ora enunciato non richiede l'esistenza della derivata della funzione $f(x)$ fra 0 e ε, e neppure suppone la sua continuità fuori del punto 0, perchè $\alpha(x)$ può essere anche discontinua. Se poi si suppone in particolare che $\alpha(x)$ si riduca all' unità e che $f(x)$ fra 0 e ε (0 al più escl.) abbia una derivata determinata e finita, la condizione precedente relativa al prodotto $\alpha(x)\, x\, \lambda_\beta$ si riduce all' altra che la funzione $x f'(x)$ abbia per limite zero per $x=+0$; e anche così resta sempre estesa quella condizione data dal Du Bois-Reymond nel Vol. 79 del Giornale di Borchardt per la quale si richiede che la derivata $f'(x)$ sia atta alla integrazione anche ridotta ai valori assoluti.

Aggiungiamo che nel paragrafo seguente ci occuperemo del caso in cui il prodotto $xf'(x)$, o l' altro più generale $\alpha(x)\, x\, \lambda_\beta$ non hanno per limite zero per $x+=0$; ma intanto è da osservare che se $f(x)$ ha la forma precedente, e questi prodotti non superano mai un numero finito, il teorema del §. 30 non ci assicura che la formola (6) continui ad essere applicabile, ma ci permette però ancora di dire che al crescere indefinito di h l' integrale

$\int_0^\varepsilon \{f(x) - f(+0)\} \varphi(x,h)dx$ non supererà mai un certo numero finito; e se $\alpha(x)\, \beta(x) = \alpha(x) \cos \psi(x)$, basterà che $\alpha(x)\, x \psi'(x)$ abbia per limite zero per $x=+0$ onde altrettanto accada per $h=\infty$ dell'integrale $\int_0^\varepsilon \alpha(x) \cos \psi(x)\, \varphi(x, h)dx$; mentre se $\alpha(x)\, x\, \psi'(x)$ non tende a zero con x, ma è sempre inferiore a un numero finito,

l'integrale $\int_0^{\varepsilon} \alpha(x) \cos \psi(x) \varphi(x, h) dx$ *potrà* non avere per limite zero nè una quantità determinata, ma oscillerà soltanto fra limiti finiti. In ciò sono compresi alcuni dei risultati ottenuti per altra via e soltanto pel caso speciale di $\varphi(x, h) = \frac{\text{sen}\, hx}{\text{sen}\, x}$ dal sig. Du Bois-Reymond nella sua memoria *Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourierschen Darstellungs-formeln* (*Abhandl. der k. bayer Akad. der W. II. Cl. XII. Bd. II. Abth.*).

Si deve poi notare che nel caso particolare di $\varphi(x, h) = \frac{\text{sen}\, hx}{\text{sen}\, x}$, le condizioni poste sopra per $\varphi(x, h)$ sono tutte soddisfatte, e potendo prendere $A = \pi$, $B = 1 + \varepsilon$, $p = 2$, $q = 2$, $k = \frac{3}{2}$, se $\alpha(x)\beta(x)$ tende a zero con x, e per x fra 0 e ε si ha $\alpha(x)\beta(x) < \sigma$, si potrà scrivere:

$$\int_0^{\varepsilon} \alpha(x)\, \beta(x)\, \frac{\text{sen}\, hx}{\text{sen}\, x} dx \leq 2 \{ 5\sigma + 2\beta'[\alpha(\varepsilon) - \alpha(+0)] \} \pi + 3(1+\varepsilon)\, C,$$

salvo a sostituire a $\alpha(\varepsilon) - \alpha(+0)$ il suo valore assoluto, e a C il prodotto $C \frac{\alpha(+0)}{\alpha(\varepsilon)}$ nei casi indicati sopra.

32. Il teorema dimostrato ci assicura dunque che quando $\alpha(x)$ è finita e non fà oscillazioni fra 0 e ε, e $\beta(x)$ ha un estremo oscillatorio λ_β che fra 0 e ε (0 al più escl.) è sempre finito, mentre $\alpha(x)\beta(x)$ tende a zero con x, e $\varphi(x, h)$ soddisfa alle condizioni dei due paragrafi precedenti, la formola:

$$\lim_{h=\infty} \int_0^{\varepsilon} \alpha(x)\, \beta(x)\, \varphi(x, h)\, dx = 0$$

non può cessare di sussistere altro che quando $\alpha(x)\, x\, \lambda_\beta$ non tende a zero con x.

A complemento ora di questo teorema ne darò un altro

che riguarda appunto il caso in cui il prodotto $\alpha(x)\, x\, \lambda_\beta$ non ha per limite zero per $x=+0$, o si è incerti sull' esistenza e sul valore di questo limite.

Si supponga perciò che l' estremo oscillatorio λ_β prenda anche valori indefinitamente grandi col tendere di x a zero, e, limitandoci ad un caso particolare, si ammetta che per x diverso da zero esso sia il prodotto $\mu(x)\nu(x)$ di due funzioni $\mu(x), \nu(x)$ l' una delle quali $\nu(x)$ è finita e continua per x diverso da zero, ma cresce indefinitamente senza oscillare al tendere a zero di x, e fuori del punto zero ha una derivata determinata o un estremo oscillatorio atto alla integrazione, mentre $\mu(x)$ è tale che il prodotto $\alpha(x)\mu(x)$ ha per limite zero per $x=+0$, o almeno non cresce indefinitamente; essendo al solito $\alpha(x)$ una funzione senza oscillazioni fra 0 e ε che (con ε sufficientemente piccolo) può anche supporsi sempre positiva, e $\beta(x)$ essendo sempre numericamente inferiore a un numero finito β'. Inoltre, poichè il prodotto $\beta(x)\,\nu(x)$ è finito e continuo fra ε_1 e ε, ove ε_1 è un numero qualunque fra 0 e ε (0 al più escl.), ammettiamo che se $\chi(x)$ è una funzione fra ε_1 e ε la cui derivata è $\beta(x)\,\nu(x)$ [come ad es. l' integrale $\int_\varepsilon^x \beta(x)\,\nu(x)dx$], il prodotto $\alpha(x)\chi(x)$ col tendere a zero di x sia sempre inferiore a un numero finito; e ammettiamo infine che il prodotto $x\,\nu(x)$, non vada mai decrescendo in valore assoluto col tendere a zero di x; e ciò anche nel caso in cui esso non ha per limite l'infinito per $x=+0$ (il che però potrà soltanto avvenire quando $\alpha(+0)$ non è zero, se il prodotto $\alpha(x)\, x\, \lambda_\beta = \alpha(x)\,\mu(x)\, x\, \nu(x)$ non deve tendere a zero con x).

Così essendo, scegliamo il numero ε talmente piccolo che fra 0 e ε sia sempre $\alpha(x)\beta(x) < \sigma$, e indichiamo ancora con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t, \ldots, \alpha_{n-1}$ i punti di massimo o di minimo dell'integrale $\int_0^x \varphi(x, h)\, dx$ fra 0 e ε (0 e ε escl.) pei quali poniamo intanto

tutte le condizioni dei due paragrafi precedenti, supponendo inoltre in questo caso che $\varphi(x, h)$ sia continua fra 0 e ε (0 al più escl.), e includendo pure la condizione che, mentre α_1 tende a zero al crescere indefinito di h, i rapporti $\frac{\alpha_{s+1}-\alpha_s}{\alpha_1}$, oltre a mantenersi sempre inferiori a un numero finito p, non si accostino a zero più di una certa quantità q.

Considerando allora le quantità $\nu(\alpha_1), \nu(\alpha_2), .., \nu(\alpha_t), .., \nu(\alpha_{n-1})$, per le ipotesi che abbiamo fatto si vede subito che esse andranno successivamente diminuendo in valore assoluto, e quindi per quel valore che si considera di h o di α_1, o saranno tutte numericamente inferiori a $\frac{1}{\alpha_1^r}$, ove r è un numero positivo non superiore all'unità, o fra esse ve ne sarà una che è maggiore o uguale a $\frac{1}{\alpha_1^r}$, mentre le precedenti sono pur maggiori o uguali e le seguenti non lo sono, o esse saranno tutte maggiori o uguali ad $\frac{1}{\alpha_1^r}$; e noi supporremo perciò in generale che sia in valore assoluto $\nu(\alpha_t) \geqq \frac{1}{\alpha_1^r}$, e $\nu(\alpha_{t+1}) < \frac{1}{\alpha_1^r}$, ... senza escludere che α_t possa anche essere lo zero o α_{n-1}, ec.

Osserveremo poi che se l'integrale $\int_0^x \varphi(x, h)dx$ non supera mai A in valore assoluto, per le formole del §. 30 si può scrivere:

$$\int_0^\varepsilon \alpha(x)\,\beta(x)\varphi(x,h)\,dx = 10\,\theta\,A\sigma + \sum_1^{n-2} \int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}} \{\alpha(x)-\alpha(\alpha_s)\}\,\beta(x)\varphi(x,h)dx +$$

$$+ \sum_1^{n-2} \alpha(\alpha_s) \int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}} \{\beta(x)-\beta(\alpha_s)\}\,\varphi(x, h)\,dx,$$

con $-1 \leqq \theta \leqq 1$; e coi ragionamenti stessi del medesimo paragrafo si vedrà intanto che la prima somma del secondo membro è numericamente inferiore in valore assoluto a quello di

$4\,A\,\beta' \{\alpha(\varepsilon) - \alpha(+0)\}$, e quindi se ε è abbastanza piccolo, essa sarà piccola a piacere.

La seconda somma poi può porsi sotto la forma:

$$\sum_{1}^{t-1} + \alpha(\alpha_t) \int_{\alpha_t}^{\alpha_{t+1}} \{\beta(x) - \beta(\alpha_t)\} \varphi(x, h)\, dx + \sum_{t+1}^{n-2};$$

e se α_t sarà zero la prima somma mancherà insieme al secondo termine, mentre se α_t sarà α_{n-1} mancherà questo termine insieme all' ultima somma; e se α_t sarà α_1 mancherà soltanto la prima somma, mentre se $\alpha_t = \alpha_{n-2}$ mancherà soltanto l' ultima.

Ora per l'integrale $\alpha(\alpha_t) \int_{\alpha_t}^{\alpha_{t+1}} \{\beta(x) - \beta(\alpha_t)\} \varphi(x, h) dx$, quando occorre di considerarlo, si osserverà che se α''_t è un punto fra α_t e α_{t+1} nel quale la differenza $\beta(x) - \beta(\alpha_t)$ ha il massimo valore assoluto, l' integrale stesso è numericamente inferiore a $\alpha(\alpha_t) \{\beta(\alpha''_t) - \beta(\alpha_t)\} \int_{\alpha_t}^{\alpha_{t+1}} \varphi_1(x, h)\, dx$ ove $\varphi_1(x, h)$ è la funzione dei valori assoluti di $\varphi(x, h)$; e poichè al solito si ha $\int_{\alpha_t}^{\alpha_{t+1}} \varphi(x, h)\, dx < 4\,A$, esso sarà numericamente inferiore al valore assoluto di $4\,A\,\alpha(\alpha_t) [\beta(\alpha''_t) - \beta(\alpha_t)]$, e quindi, osservando che questa quantità può porsi sotto la forma $4\,A\,\beta(\alpha''_t) [\alpha(\alpha_t) - \alpha(\alpha''_t)] + 4\,A [\alpha(\alpha''_t) \beta(\alpha''_t) - \alpha(\alpha_t) \beta(\alpha_t)]$, si vedrà senz'altro che lo stesso integrale è numericamente inferiore a $4\,A\,\beta' [\alpha(\varepsilon) - \alpha(+0)] + 8\,A\,\sigma$, ove di $[\alpha(\varepsilon) - \alpha(+0)]$ deve prendersi il valore assoluto, e in conseguenza esso è arbitrariamente piccolo.

Rispetto poi alla somma $\sum_{t+1}^{n-2}$, quando occorra di considerarla, si osserverà che, se $x\,\varphi(x, h)$ è sempre inferiore a B in valore assoluto, col processo stesso del §. 30 si trova che essa è numericamente inferiore all'altra $\frac{B}{2} \sum_{t+1}^{n-2} \alpha(\alpha_s) \lambda^0_s \alpha_s \left(\frac{\alpha_{s+1} - \alpha_s}{\alpha_1}\right)^2 \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_s}\right)^2$,

ove λ^0_s è al solito il limite superiore dei valori assoluti di λ_β fra α_s e α_{s+1}; e se i rapporti $\frac{\alpha_{s+1}-\alpha_s}{\alpha_1}$ sono sempre inferiori a un numero finito p, e μ^0_s è il limite superiore dei valori assoluti di $\mu(x)$ fra α_s e α_{s+1}, si vede subito che essa sarà anche inferiore a $\frac{B\,p^2}{2}\sum_{t+1}^{n-2}\alpha(\alpha_s)\,\mu^0_s\,\alpha_s\,\nu(\alpha_s)\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_s}\right)^2$.

Ma avendo ammesso che in valore assoluto il prodotto $x\,\nu(x)$ col tendere a zero di x non vada mai decrescendo, è chiaro che nella ultima somma il maggiore valore assoluto dei varii prodotti $\alpha_s\,\nu(\alpha_s)$ sarà quello di $\alpha_{t+1}\,\nu(\alpha_{t+1})$, e quindi non supererà $\alpha_1^{1-r}\frac{\alpha_{t+1}}{\alpha_1}$ giacchè $\nu(\alpha_{t+1})<\frac{1}{\alpha_1^r}$; dunque si vede intanto che la somma $\sum_{t+1}^{n-2}\int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}}\{\beta(x)-\beta(\alpha_s)\}\,\varphi(x,h)\,dx$ sarà numericamente inferiore a $\frac{B\,p^2\alpha_1^{1-r}}{2}\frac{\alpha_{t+1}}{\alpha_1}\sum_{t+1}^{n-2}\alpha(\alpha_s)\,\mu^0_s\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_s}\right)^2$.

Ora, quando vi siano degli intervalli (α_s, α_{s+1}) nei quali μ^0_s non sia il massimo, ma sia semplicemente il limite superiore dei valori assoluti di $\mu(x)$, indicando con μ'_s uno di quei valori assoluti che vengono effettivamente presi da $\mu(x)$ nello stesso intervallo (α_s, α_{s+1}), si potrà supporre μ'_s vicino quanto si vuole a μ^0_s, e si avrà:

$$\frac{B\,p^2\,\alpha_1^{1-r}}{2}\frac{\alpha_{t+1}}{\alpha_1}\sum_{t+1}^{n-2}\alpha(\alpha_s)\,\mu^0_s\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_s}\right)^2=\frac{B\,p^2\,\alpha_1^{1-r}}{2}\frac{\alpha_{t+1}}{\alpha_1}\sum_{t+1}^{n-2}\alpha(\alpha_s)\,\mu'_s\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_s}\right)^2+$$
$$+\frac{B\,p^2\,\alpha_1^{1-r}}{2}\frac{\alpha_{t+1}}{\alpha_1}\sum_{t+1}^{n-2}\alpha(\alpha_s)(\mu^0_s-\mu'_s)\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_s}\right)^2,$$

e indipendentemente da h e da ε la seconda somma del secondo membro potrà rendersi piccola a piacere prendendo μ'_s abbastanza vicino a μ^0_s.

Ora se $\alpha(x)$ tende a zero con x, e x'_s è il valore di x

pel quale $\mu(x) = \pm \mu'_s$, si ha evidentemente $\alpha(\alpha_s)\mu'_s \leq \alpha(x'_s)\mu'_s$; quindi, se γ è un numero di cui è sempre inferiore in valore assoluto il prodotto $\alpha(x)\mu(x)$, si avrà sempre $\alpha(\alpha_s)\mu'_s < \gamma$.

Se poi $\alpha(x)$ non tende a zero con x, si avrà $\alpha(\alpha_s)\mu'_s = \frac{\alpha(\alpha_s)}{\alpha(x'_s)}\alpha(x'_s)\mu'_s$, e quindi sarà $\alpha(\alpha_s)\mu'_s < a\gamma$, essendo a il rapporto $\frac{\alpha(\varepsilon)}{\alpha(+0)}$ o il rapporto inverso; dunque in ogni caso si avrà in valore assoluto:

$$\sum_{t+1}^{n-2} \alpha(\alpha_s) \int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}} \{\beta(x) - \beta(\alpha_s)\} \varphi(x, h)\, dx < \frac{Bp^2 a\gamma \alpha_1^{1-r}}{2} \frac{\alpha_{t+1}}{\alpha_1} \sum_{t+1}^{n-2} \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_s}\right)^2,$$

essendo $a=1$ se $\alpha(+0) = 0$, e uguale al maggiore dei due rapporti $\frac{\alpha(\varepsilon)}{\alpha(+0)}, \frac{\alpha(+0)}{\alpha(\varepsilon)}$ se $\alpha(+0)$ non è zero; quindi, poichè per le nostre ipotesi sui rapporti $\frac{\alpha_{s+1} - \alpha_s}{\alpha_1}$ si ha (§. 30) $\sum_{t+1}^{n-2}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_s}\right)^2 < \frac{\alpha_1}{q\,\alpha_t}$, e $\frac{\alpha_{t+1}}{\alpha_t} = 1 + \frac{\alpha_{t+1} - \alpha_t}{\alpha_t} < 1 + p$, si vede ora chiaramente che la somma $\sum_{t+1}^{n-2} \alpha(\alpha_s) \int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}} \{\beta(x) - \beta(\alpha_s)\} \varphi(x, h) dx$

sarà numericamente inferiore a $\frac{Bp^2(1+p)a\gamma\alpha_1^{1-r}}{2q}$, e quindi, dipendentemente da ε, quando $\alpha(x)\mu(x)$ tende a zero con x sarà anch'essa minore di quel numero che più ci piace; e lo stesso accadrà anche quando $\alpha(x)\mu(x)$ non tende a zero con x ma non cresce indefinitamente, purchè allora non sia $r=1$.

Resta dunque ora a considerarsi la somma

$\sum_{1}^{t-1} \alpha(\alpha_s) \int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}} \{\beta(x) - \beta(\alpha_s)\} \varphi(x, h)\, dx$ nel caso che essa vi sia, e per questo osserveremo che essa si compone delle due:

$\sum_1^{t-1} \alpha(\alpha_s) \int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}} \beta(x)\, \varphi(x,h) dx - \sum_1^{t-1} \alpha(\alpha_s)\, \beta(\alpha_s) \int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}} \varphi(x,h) dx$; e poichè (a causa delle ipotesi che abbiamo poste intorno ai valori dell'integrale $\int_0^x \varphi(x, h)\, dx$ nei suoi punti di massimo successivi, o in quelli di minimo) gli integrali $\int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}} \varphi(x, h)\, dx$ sono tutti dello stesso segno o nulli, è evidente che il secondo termine sarà numericamente inferiore al valore assoluto di $\sigma \int_{\alpha_1}^{\alpha_t} \varphi(x,h) dx$, ovvero a $2\,\sigma\, A$, e basterà quindi occuparsi del primo.

Per questo poniamo $x\, \varphi(x, h) = \psi(x, h)$. Questa funzione $\psi(x, h)$ sarà sempre inferiore a B in valore assoluto, e sarà zero nei punti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$; quindi poichè si ha:

$$\int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}} \beta(x)\, \varphi(x, h)\, dx = \int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}} \beta(x)\, \nu(x)\, \frac{\psi(x, h)}{x\, \nu(x)} d\, x\,,$$

applicando una integrazione per parti col prendere $\frac{\psi(x, h)}{x\, \nu(x)}$ come fattore finito, e coll'osservare che per l'integrale indefinito $\int \beta(x)\, \nu(x)\, d\, x$ può prendersi $\chi(x) - \frac{H}{\alpha(\alpha_s)}$, ove H è il limite per $x = +0$ di $\alpha(x)\, \chi(x)$ se si sà che questo limite esiste, o altrimenti è un numero finito che potrebbe essere qualunque ma che allora noi lo prenderemo senz' altro uguale a zero, si troverà subito:

$$\alpha(\alpha_s) \int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}} \beta(x)\, \varphi(x, h)\, dx = -\, \alpha(\alpha_s) \int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}} \left\{ \chi(x) - \frac{H}{\alpha(\alpha_s)} \right\} \frac{d}{dx} \left[\frac{\psi(x, h)}{x\, \nu(x)} \right] d\, x\,,$$

ovvero:

$$\alpha(\alpha_s) \int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}} \beta(x)\, \varphi(x, h) dx = - \int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}} \left\{ \alpha(\alpha_s)\, \chi(x) - H \right\} \psi(x,h) \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x\, \nu(x)} \right) dx -$$

$$- \int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}} \frac{\left\{ \alpha(\alpha_s)\, \chi(x) - H \right\}}{x\, \nu(x)}\, \frac{d\, \psi(x, h)}{dx}\, dx\,.$$

Ma si osservi che se per $x=0$ e h finito $\varphi(x, h)$ si mantiene finito, con una integrazione per parti si ha:

$$\int_0^{\alpha_s} \varphi(x, h)\, dx = \Big[\psi(x, h) \log x\Big]_0^{\alpha_s} - \int_0^{\alpha_s} \log x \frac{d\psi(x, h)}{dx}\, dx,$$

ovvero:

$$\int_0^{\alpha_s} \varphi(x, h)\, dx = -\int_0^{\alpha_s} \log x \frac{d\psi(x,h)}{dx}\, dx =$$

$$= -\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_1 \int_0^{\alpha_s} \log x\, dx = -\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_1 \left(\alpha_s - \alpha_s \log \alpha_s\right);$$

ove $\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_1$ indica un numero compreso fra i limiti inferiore e superiore di $\frac{d\psi(x, h)}{dx}$ per x fra 0 e α_s. Si vedrà subito da ciò che in forza delle nostre ipotesi a meno che $\lim_{h=\infty} \int_0^{\varepsilon} \varphi(x, h) dx$ non sia zero, la derivata $\frac{d\psi(x,h)}{dx}$ col tendere a zero di x deve prendere *anche* valori tanto più grandi quanto più α_1 è piccolo, talchè se s' indica con ψ'_0 il limite superiore dei valori assoluti di $\frac{d\psi(x,h)}{dx}$ fra α_1 e ε, questo numero ψ'_0 dovrà crescere indefinitamente all' impiccolire indefinito di α_1.

Sostituendo ora nel valore precedente di $\alpha(\alpha_s)\int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}} \beta(x)\varphi(x,h)dx$, e indicando con x'_s il valore di x fra α_s e α_{s+1} pel quale la funzione continua $\alpha(\alpha_s)\chi(x) - \mathrm{H}$ prende il suo massimo valore assoluto fra α_s e α_{s+1}, si vede chiaro che lo stesso integrale $\alpha(\alpha_s)\int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}} \beta(x)\, \varphi(x, h)\, dx$ sarà numericamente inferiore a:

$$\left\{\alpha(\alpha_s)\, \chi(x'_s) - \mathrm{H}\right\} \left[\mathrm{B}\left(\frac{1}{\alpha_{s+1}\nu(\alpha_{s+1})} - \frac{1}{\alpha_s\, \nu(\alpha_s)}\right) + \psi'_0 \frac{\alpha_{s+1} - \alpha_s}{\alpha_{s+1}\, \nu(\alpha_{s+1})},\right]$$

ove di $\alpha(\alpha_s)\,\chi(x'_s)-\mathrm{H}$ bisogna prendere il valore assoluto; quindi se per i valori $1, 2, \ldots, t-1$ di s queste quantità $\alpha(\alpha_s)\,\chi(x'_s)-\mathrm{H}$ si mantengono inferiori a τ, la somma $\sum_1^{t-1} \alpha(\alpha_s) \int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}} \beta(x)\varphi(x, h)\, dx$, quando è da considerarsi, sarà numericamente inferiore a:

$$\tau \left\{ \mathrm{B} \left(\frac{1}{\alpha_t\, \nu(\alpha_t)} - \frac{1}{\alpha_1\, \nu(\alpha_1)} \right) + \frac{\psi'_0}{\alpha_t\, \nu(\alpha_t)} (\alpha_t - \alpha_1) \right\},$$

ovvero a:

$$\tau \left\{ \mathrm{B} \left(\frac{1}{\varepsilon\, \nu(\varepsilon)} - \frac{1}{\alpha_1\, \nu(\alpha_1)} \right) + \psi'_0 \alpha_1{}^r \right\},$$

giacchè $\nu(\alpha_t) \geq \frac{1}{\alpha_1{}^r}$, e $\frac{\alpha_t - \alpha_1}{\alpha_t} < 1$.

Si supponga ora dapprima che $\alpha(x)\,\chi(x)$ per $x=+0$ abbia un limite determinato, e questo limite sia il numero H. Allora, se ε è talmente piccolo che per x fra 0 e ε si abbia sempre in valore assoluto $\alpha(x)\,\chi(x)-\mathrm{H}<\sigma_1$, essendo σ_1 un numero piccolo a piacere, si vede subito che nel caso in cui $\alpha(x)$ per $x=+0$ ha per limite zero, quando $\mathrm{H}=0$ si avrà $\alpha(\alpha_s)\,\chi(x'_s)-\mathrm{H}=\frac{\alpha(\alpha_s)}{\alpha(x'_s)}\,\alpha(x'_s)\,\chi(x'_s)<\sigma_1$, e quando H è diverso da zero, per es. positivo, per essere allora anche $\chi(x)$ positivo, sarà $\alpha(\alpha_s)\,\chi(x'_s)-\mathrm{H} \leq \alpha(x'_s)\,\chi(x'_s)-\mathrm{H}<\sigma_1$, talchè in questi casi τ sarà inferiore a σ_1.

Invece se $\alpha(x)$ non ha per limite zero per $x=+0$, avendosi:

$$\alpha(\alpha_s)\,\chi(x'_s)-\mathrm{H}=\alpha(x'_s)\,\chi(x'_s)-\mathrm{H}+\alpha(x'_s)\,\chi(x'_s) \left\{ \frac{\alpha(\alpha_s)-\alpha(x'_s)}{\alpha(x'_s)} \right\},$$

si vede chiaro che τ sarà inferiore a $\sigma_1+(\mathrm{H}+\sigma_1)\,\frac{\alpha(\varepsilon)-\alpha(+0)}{a'}$, ove di $\mathrm{H}+\sigma_1$, e $\alpha(\varepsilon)-\alpha(+0)$ bisogna prendere i valori assoluti, e a' è $\alpha(\varepsilon)$ o $\alpha(+0)$ secondochè $\alpha(x)$ da ε a 0 non và decrescendo o non và crescendo; dunque anche in questo caso τ sarà piccolo a piacer nostro, e in conseguenza se il prodotto

$\alpha_1{}^r \psi'_0$, o $\alpha_1{}^r \frac{d\,\psi(x\,,h)}{dx}$ non supera mai un certo numero finito, anche la somma $\sum_1^{t-1} \alpha(\alpha_s) \int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}} \beta(x)\,\varphi(x\,,h)\,dx$ sarà piccola in valore assoluto quanto si vuole, poichè essa sarà inferiore a $(\sigma_1 + k_0)\,(\mathrm{B}\,\sigma_2 + \alpha_1{}^r\,\psi'_0)$, ove k_0 è zero o è il valore assoluto di $(\mathrm{H}+\sigma_1)\,\frac{\alpha(\varepsilon)-\alpha(+0)}{a'}$, secondochè $\alpha(+0)$ è zero o nò, e σ_2 è la differenza numerica fra $\frac{1}{\varepsilon\,\nu(\varepsilon)}$ e il limite di $\frac{1}{x\,\nu(x)}$ per $x=+0$, e quindi è arbitrariamente piccola dipendentemente da ε.

Lo stesso risultato si ha se il prodotto $\alpha(x)\,\chi(x)$, pur mantenendosi sempre inferiore a un numero finito c fra 0 e ε, non ha un limite determinato per $x=+0$, o si è incerti, purchè allora il prodotto $\alpha_1{}^r\,\psi'_0$, o $\alpha_1{}^r\,\frac{d\,\psi(x\,,h)}{dx}$ abbia per limite zero per $x=+0$, giacchè in tal caso, preso $\mathrm{H}=0$, si troverà che il valore assoluto di τ sarà inferiore ad $a\,c$, ove a ha il significato stabilito sopra; e in conseguenza la somma $\sum_1^{t-1} \alpha(\alpha_s) \int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}} \beta(x)\,\varphi(x\,,h)\,d\,x$ sarà numericamente inferiore ad $a\,c\,(\mathrm{B}\,\sigma_2 + \psi'_0\,\alpha_1{}^r)$.

Riassumendo dunque si può ora evidentemente concludere che: „ se la funzione $\varphi(x\,,h)$ è continua fra 0 e ε, e soddisfa „ ancora alle condizioni dei due paragrafi precedenti, inclusa „ quella che mentre α_1 tende a zero col crescere indefinito „ di h, i rapporti $\frac{\alpha_{s+1}-\alpha_s}{\alpha_1}$ oltre a restare sempre inferiori a un „ numero finito p non si accostino mai a zero più di un certo „ numero q, e di più è tale che per x fra α_1 e ε la derivata „ di $x\,\varphi(x\,,h)$ moltiplicata per $\alpha_1{}^r$ con $r \leq 1$ resti sempre „ numericamente inferiore a un numero finito C; allora la „ formola (6) sussisterà anche nel caso in cui avendosi „ $f(x)=f(+0)+\alpha(x)\,\beta(x)$, il prodotto $\alpha(x)\,\beta(x)$ per $x=+0$ ha

„ per limite zero, $\alpha(x)$ non fà infinite oscillazioni fra 0 e ε, e $\beta(x)$
„ è sempre numericamente inferiore a un numero finito β', ma
„ non è soddisfatta la condizione $\lim \alpha(x)\, x\, \lambda_\beta = 0$ del para-
„ grafo precedente o si è incerti su questo, purchè però allora
„ siano soddisfatte le condizioni seguenti: 1.° che λ_β si decom-
„ ponga nel prodotto $\mu(x)\,\nu(x)$ di due funzioni $\mu(x), \nu(x)$ la prima
„ delle quali $\mu(x)$ è tale che se $r<1$ il prodotto $\alpha(x)\mu(x)$ non
„ cresce indefinitamente al tendere di x a zero, e se $r=1$ ha
„ per limite zero; e la seconda $\nu(x)$ è finita e continua fra
„ 0 e ε, cresce indefinitamente al tendere a zero di x senza
„ oscillare, e ha una derivata o un estremo oscillatorio atto
„ all'integrazione fra ε_1 e ε, essendo ε_1 un numero qualunque
„ compreso fra 0 e ε (0 al più escl.); 2.° che il prodotto $x\,\nu(x)$
„ col tendere a zero di x non decresca mai in valore asso-
„ luto (*), e se $\chi(x)$ è una funzione la cui derivata fra ε_1 e ε
„ è $\beta(x)\,\nu(x)$ [come ad es. l'integrale $\int_\varepsilon^x \beta(x)\,\nu(x) dx$] il prodotto
„ $\alpha(x)\,\chi(x)$ per $x=+0$ abbia un limite determinato e finito H;
„ con questo però che se la condizione relativa al prodotto
„ $\alpha(x)\,\chi(x)$ non sarà soddisfatta o si sarà incerti, pur sapendosi
„ che questo prodotto per x fra 0 e ε resta sempre inferiore a un
„ numero finito c, la formola (6) continuerà ancora a sussistere
„ purchè allora il prodotto di $\alpha_1{}^r$ per la derivata di $x\varphi(x,h)$
„ quando x è fra α_1 e ε tenda a zero insieme ad α_1 „.

33. In questi casi poi se H_0 sarà il limite di $\frac{1}{x\,\nu(x)}$ per $x=+0$, e ε sarà scelto in modo che fra 0 e ε $\alpha(x)$ non faccia oscillazioni, e si abbia sempre in valore assoluto

$$\alpha(x)\,\beta(x) < \sigma,\ \alpha(x)\mu(x) < \gamma,\ \frac{1}{\varepsilon\,\nu(\varepsilon)} - H_0 < \sigma_2,$$ essendo σ, e σ_2

(*) È chiaro che quando $x\,\nu(x)$ col tendere a zero di x non decresce in valore assoluto, altrettanto accade del suo prodotto per la funzione crescente $\frac{1}{x}$, ossia di $\nu(x)$; talchè allora la condizione che $\nu(x)$ cresca all'infinito senza oscillare col tendere a zero di x viene soddisfatta da sè, e si potrebbe fare a meno di porla esplicitamente.

numeri positivi arbitrariamente piccoli, e γ un numero finito che se $r=1$ dovrà pure essere arbitrariamente piccolo, si avrà in valore assoluto:

$$\int_0^{\varepsilon}[f(x)-f(+0)]\varphi(x,h)dx<4A\left\{5\sigma+2\beta'[\alpha(\varepsilon)-\alpha(+0)]\right\}+$$

$$+\frac{Bp^2(1+p)\gamma a\alpha_1^{1-r}}{2q}+\tau(B\sigma_2+C),$$

ove di $\alpha(\varepsilon)-\alpha(+0)$ bisogna prendere il valore assoluto; a è uguale ad uno se $\alpha(+0)=0$, ed è invece uguale al più grande dei due numeri $\frac{\alpha(\varepsilon)}{\alpha(+0)}$, $\frac{\alpha(+0)}{\alpha(\varepsilon)}$ quando $\alpha(+0)$ non è zero; τ può prendersi uguale ad ac se il prodotto $\alpha(x)\chi(x)$ è sempre numericamente inferiore a c e non ha un limite determinato per $x=+0$, o si è incerti, e allora C deve potersi rendere arbitrariamente piccolo; mentre se $\alpha(x)\chi(x)$ ha un limite determinato H per $x=+0$, e fra 0 e ε si ha $\alpha(x)\chi(x)-H<\sigma_1$ essendo σ_1 arbitrariamente piccolo, si può prendere $\tau=\sigma_1+k_0$, ove k_0 è zero se $\alpha(+0)=0$, e se $\alpha(+0)$ non è zero k_0 è il valore assoluto di $(H+\sigma_1)\frac{\alpha(\varepsilon)-\alpha(+0)}{a'}$, essendo a' il più piccolo dei due numeri $\alpha(+0)$, $\alpha(\varepsilon)$.

E si può al solito aggiungere che se $\alpha(x)$ fra 0 e ε farà infinite oscillazioni, ma le verrà a perdere tutte coll'aggiungervi una funzione di primo grado, la formola (6) continuerà ancora ad essere applicabile tutte le volte che siano soddisfatte le condizioni precedenti, e dei prodotti $x\mu(x)$, $x\chi(x)$, il primo abbia per limite zero se $r=1$ e un limite finito se $r<1$, e l'altro abbia un limite determinato e finito, o almeno siano soddisfatte per esso le condizioni che si avevano sopra pel prodotto $\alpha(x)\chi(x)$.

34. È degno di nota che i due ultimi teoremi quì dimostrati danno un campo immenso di validità della formola (6), e può dirsi che si completino a vicenda, perocchè quando per una certa funzione $f(x)=f(+0)+\alpha(x)\beta(x)$ non sia applicabile il primo teorema per la ragione che il prodotto $\alpha(x)x\lambda_\beta$ non ha per limite zero per $x=+0$, o si è incerti, sarà subito il caso di esa-

minare se sia applicabile il secondo; nè le condizioni che si hanno per $\varphi(x, h)$ sono molto restrittive, e d'altronde esse sono tutte soddisfatte quando $\varphi(x, h) = \frac{\operatorname{sen} h x}{\operatorname{sen} x}$, perchè allora, con $\alpha_1 = \frac{\pi}{h}$, $\alpha_s = (2s-1)\frac{\pi}{h}$, si ha $p = q = 2$, e, essendo $x\varphi(x, h) = \frac{x}{\operatorname{sen} x} \operatorname{sen} hx$, il prodotto $\alpha_1 \frac{d[x\varphi(x, h)]}{dx}$ per x compreso fra 0 e ε non supera $\pi(2+\varepsilon)^2$, e può prendersi quindi $C = \pi(2+\varepsilon)^2$, con $A = \pi$, $B = 1+\varepsilon$.

E mentre p. es. se $\alpha(x)$ tenderà a zero con x senza oscillare, la formola (6) sarà applicabile senza eccezione veruna in forza del primo teorema quando $x\lambda_\beta$ non cresce indefinitamente, nel caso invece in cui col tendere a zero di x questo prodotto $x\lambda_\beta$ prenda anche valori indefinitamente grandi il primo teorema potrà presentare delle eccezioni che ci facciano restare nel dubbio; ma allora si potrà passare ad applicare il secondo teorema, e bene spesso le indicate eccezioni verranno a sparire nel fare questa applicazione.

35. Così in particolare quando $\varphi(x, h)$ soddisfa alle condizioni che respettivamente abbiamo poste nei varii casi, supponendo che sia:

$$f(x) = f(+0) + \alpha(x)\,F[\psi(x)],$$

ove $\alpha(x)$ tende a zero con x senza oscillare, $\psi(x)$ cresce indefinitamente, e $F[\psi(x)]$ fà infinite oscillazioni, se avverrà che la funzione $F(z)$ anche al crescere indefinito di z resti inferiore a un numero finito insieme alla sua derivata $F'(z)$, per il primo teorema si potrà dir subito che se il prodotto $x\psi'(x)$ col tendere a zero di x non supera mai un certo numero finito la formola (6) è applicabile alla funzione $f(x)$.

E se il prodotto $x\psi'(x)$ crescerà indefinitamente, il primo teorema potrà non bastar più; ma allora applicando il secondo teorema, coll' osservare che posto ora $\beta(x) = F[\psi(x)]$ si ha $\beta'(x) = F'[\psi(x)]\psi'(x)$, e si può prendere quindi $\mu(x) = F'[\psi(x)]$, $\nu(x) = \psi'(x)$, si vedrà subito che se $F'(z)$ è sempre finita, e $\psi''(x)$ è

atta alla integrazione fra ε_1 e ε $(0<\varepsilon_1<\varepsilon)$, la formola (6) è ancora applicabile tutte le volte che il prodotto $x\psi'(x)$ nel suo crescere all' infinito mentre x tende a zero non fà oscillazioni, e l'altro $\alpha(x)\int_\varepsilon^x F[\psi(x)]\,\psi'(x)dx$ ha un limite determinato e finito, o almeno non supera mai in valore assoluto un numero finito c.

Più particolarmente dunque, supponendo che sia:

$$f(x)=f(+0)+\alpha(x)\cos\psi(x)\quad,\quad \text{o } F(z)=\cos z\,,$$

si trova ora che se $\alpha(x)$ tende a zero con x senza oscillare, la formola (6) sarà applicabile a questa funzione $f(x)$ quando il prodotto $x\psi'(x)$ non prende mai valori superiori a un numero finito, e anche quando cresce indefinitamente al tendere a zero di x, purchè allora esso non faccia infinite oscillazioni fra 0 a ε, e la funzione $\psi'(x)$ sia atta all'integrazione da ε_1 a ε $(0<\varepsilon_1<\varepsilon)$, giacchè in questo caso la condizione che si aveva sopra pel prodotto $\alpha(x)\int_\varepsilon^x F[\psi(x)]\,\psi'(x)\,dx$ è evidentemente soddisfatta.

E, come già dicemmo, rispetto a $\varphi(x\,,h)$ non si hanno altro che le limitazioni poste sopra; talchè ritroviamo così come caso particolarissimo un teorema che il sig. Du Bois-Reymond dette pel primo nella memoria citata al §. 31 sotto la ipotesi particolare di $\varphi(x\,,h)=\frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x}$ e di $\alpha(x)$ finita e continua ec.

36. Nei paragrafi precedenti abbiamo supposto che se $f(x)-f(+0)=\alpha(x)\beta(x)$, l' estremo oscillatorio λ_β di $\beta(x)$, pure potendo crescere indefinitamente col tendere a zero di x, sia però sempre finito per x diverso da zero.

Volendo ora dare un teorema che s' applichi anche al caso in cui λ_β diviene infinito fuori del punto zero in punti vicini quanto si vuole a zero, e quindi anche fra 0 e ε, mentre $\alpha(x)$ resta ancora una funzione sempre finita e priva di oscillazioni fra 0 e ε, $\beta(x)$ oltre essere sempre finito, è anche continuo per tutto tranne tutt' al più per $x=0$, e $\alpha(x)\,\beta(x)$

tende a zero con x, noi osserveremo che se λ_β è atto alla integrazione fra 0 e ε, applicando la formola del Du Bois-Reymond data al §. 9. e poi integrando per parti si trova:

$$\int_0^\varepsilon \{f(x)-f(+0)\}\varphi(x,h)dx=\alpha(+0)\int_0^{\varepsilon_1}\beta(x)\varphi(x,h)dx+\alpha(\varepsilon)\int_{\varepsilon_1}^\varepsilon \beta(x)\varphi(x,h)\,dx=$$

$$=-\alpha(+0)\int_0^{\varepsilon_1}\lambda_\beta dx\int_{\varepsilon_1}^x \varphi(x,h)\,dx+\alpha(\varepsilon)\beta(\varepsilon)\int_{\varepsilon_1}^\varepsilon \varphi(x,h)dx-\alpha(\varepsilon)\int_{\varepsilon_1}^\varepsilon \lambda_\beta\int_{\varepsilon_1}^x \varphi(x,h)dx,$$

ove $0\leq\varepsilon_1\leq\varepsilon$; e quindi, se per α fra 0 e ε sarà in valore assoluto $\int_0^x \varphi(x\,,h)\,dx < A$, $\alpha(x)\,\beta(x) < \sigma$, $\alpha(x)<\alpha'$, e se λ_β sarà atta all'integrazione anche ridotta alla funzione λ^0_β dei suoi valori assoluti, l' integrale precedente o θ_h sarà numericamente inferiore a $[2\sigma+\alpha'\int_0^\varepsilon \lambda^0_\beta dx]\,A$, e la formola (6) sarà applicabile.

Se poi ammettiamo anche che i valori massimi successivi (o i minimi) dell'integrale $\int_0^x \varphi(r,h)dx$ siano sempre dello stesso segno e non vadano crescendo o non vadano decrescendo in valore assoluto, allora si può osservare che, trovate le prime formole del §. 30. invece di trasformare la somma $\sum_1^{n-2}\int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}} \alpha(\alpha_s)[\beta(x)-\beta(\alpha_s)]\varphi(x,h)dx$ coi processi di quel paragrafo, possiamo anche trasformarla eseguendo sui suoi termini una integrazione per parti, e riducendola così all'altra $\sum_1^{n-2}\int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}} \alpha(\alpha_s)\lambda_\beta\int_x^{\alpha_{s+1}} \varphi(x\,,h)\,d\,x$.

Ammettendo allora che $\alpha(x)$ tenda a zero con x e che $\alpha(x)\lambda_\beta$ sia atta all'integrazione fra 0 e ε anche ridotta alla funzione $[\alpha(x)\lambda_\beta]_0$ dei suoi valori assoluti (qualunque sia allora λ^0_β), basterà osservare che per x fra 0 e ε si ha in valore assoluto

$\int_{x}^{\alpha_{s+1}} \varphi(x, h)\, d\, x < 2\, A$, e $\alpha(\alpha_s) \leq \alpha(x)$, per concludere subito che la somma precedente è numericamente inferiore a $2\, A \int_{\alpha_1}^{\varepsilon} [\alpha(x)\, \lambda_\beta]_0\, d\, x$, e che in conseguenza la formola (6) è ancora applicabile, e si ha in valore assoluto:

$$\theta_h < 2 \left\{ 5\, \sigma + 2\, \beta' \left[\alpha(\varepsilon) - \alpha(+0) \right] + \int_0^{\varepsilon} [\alpha(x) \lambda_\beta]_0\, d x \right\} A\,.$$

Se poi $\alpha(+0)$ è diverso da zero, le condizioni d'integrabilità di $[\,\alpha(x)\, \lambda_\beta]_0$ e λ^0_β non sono distinte fra loro, e allora si ricade nel caso precedente; dunque si può ora concludere che „ se la funzione $\varphi(x, h)$ per x compreso fra 0 e ε è tale che „ l'integrale $\int_0^x \varphi(x, h)\, dx$ qualunque sia h è sempre numerica- „ mente inferiore a un numero finito A, e i suoi massimi suc- „ cessivi (o i suoi minimi) sono sempre dello stesso segno, e „ non vanno mai crescendo o non vanno mai decrescendo in „ valore assoluto, la formola (6) sarà applicabile alla funzione „ $f(x)$ tutte le volte che, essendo $f(x) = f(+0) + \alpha(x)\, \beta(x)$, la „ funzione $\alpha(x)$ fra 0 e ε non fà infinite oscillazioni e la fun- „ zione $\beta(x)$ è sempre finita, e ha una derivata o un estremo oscil- „ latorio λ_β che moltiplicato per $\alpha(x)$ resta atto alla integra- „ zione anche ridotto ai suoi valori assoluti; e nel caso in cui „ la derivata o l'estremo oscillatorio di $f(x)$ o di $\beta(x)$ siano atti „ all'integrazione anche ridotti ai valori assoluti, allora perchè la „ (6) sia applicabile basta che l' integrale $\int_0^x \varphi(x, h)\, d\, x$ soddisfi „ alla solita condizione di essere sempre numericamente infe- „ riore a un numero finito A „; e in questi casi i limiti superiori dei valori corrispondenti di θ_h saranno quelli che abbiamo indicati sopra.

Questo teorema pone per $\varphi(x,h)$ meno restrizioni di quelle che

si avevano nei due precedenti, e nel caso in cui $\alpha(x)=1$ e $\beta'(x)$, o $f(x)$ ha una derivata fra 0 e ε si riduce a quello del sig. Du Bois-Reymond che abbiamo ricordato al §. 31. Esso poi evidentemente potrà essere applicabile quando non lo siano quelli dei paragrafi precedenti, come potrà accadere anche l'inversa; e in particolare potrà applicarsi al caso appunto che noi volevamo considerare, quello cioè in cui λ_β fra 0 e ε diviene infinita in un gruppo infinito di punti di prima specie di cui 0 è un punto limite.

37. Per trovare un altro caso di validità della formola (6) quando l'integrale $\int_0^x \varphi(x,h)dx$ soddisfi alle condizioni del teorema del §. precedente, e $x\,\varphi(x,h)$ sia sempre numericamente inferiore a B, si consideri ancora l'integrale $\int_0^\varepsilon \alpha(x)\,\beta(x)\,\varphi(x,h)\,d\,x$, supponendo che il prodotto $\alpha(x)\beta(x)$ abbia per limite zero per $x=+0$, che $\alpha(x)$ sia sempre finita e non faccia oscillazioni fra 0 e ε, e che la funzione $\beta(x)$ sia atta alla integrazione essa pure fra 0 e ε, essendo al tempo stesso finita o almeno tale che il prodotto $\frac{1}{x}\int_0^x \beta(x)d\,x$ sia sempre inferiore a un numero finito (*).

Con questa ipotesi, ponendo $\int_0^x \beta(x)dx=x\gamma(x)$, $\gamma(x)$ quando le sia attribuito un valore finito qualsiasi anche nel punto $x=0$, sarà una funzione di x sempre finita fra 0 e ε, e fuori del punto zero sarà anche continua; quindi, poichè in ogni intervallo $(\varepsilon_1\,,\varepsilon)$, essendo $0<\varepsilon_1<\varepsilon$, i due fattori $\frac{1}{x}$, $\int_0^x \beta(x)\,d\,x$ hanno per estremi oscillatorii $-\frac{1}{x^2}$ e $\beta(x)$ o funzioni che dif-

(*) Così p. es. non potrebbe essere $\beta(x)=\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\,\text{sen}\frac{1}{x}\right)$, mentre potrebbe aversi invece $\beta(x)=\frac{d}{dx}\left(x\,\text{sen}\,\frac{1}{x}\right)$.

feriscono da queste per funzioni d'integrale nullo, potremo prendere per estremo oscillatorio λ_γ di $\gamma(x)$ per x diverso da zero la somma $\frac{\beta(x)}{x}-\frac{1}{x^2}\int_0^x \beta(x)\,dx$, e questa somma sarà atta alla integrazione fra ε_1 e ε (m. l. §§. 265 e 269).

Ora, essendo $\lambda_\gamma=\frac{\beta(x)}{x}-\frac{1}{x^2}\int_0^x \beta(x)\,dx$, o $\beta(x)=x\lambda_\gamma+\gamma(x)$, si vede subito che per le nostre ipotesi. il prodotto $x\lambda_\gamma$ sarà atto all'integrazione non solo fra ε_1 e ε, ma anche fra 0 e ε, come lo sono pure $\beta(x)$ e $\gamma(x)$; quindi si può scrivere:

$$\int_0^\varepsilon \alpha(x)\,\beta(x)\,\varphi(x,h)\,dx=\int_0^\varepsilon \alpha(x)\,\gamma(x)\,\varphi(x,h)\,dx+\int_0^\varepsilon \alpha(x)\,\lambda_\gamma\,x\varphi(x,h)\,dx,$$

e se il prodotto $\alpha(x)\lambda_\gamma$ sarà atto all'integrazione fra 0 e ε anche ridotto alla funzione $[\alpha(x)\lambda_\gamma]_0$ dei suoi valori assoluti, il secondo integrale sarà numericamente inferiore a $B\int_0^\varepsilon [\alpha(x)\lambda_\gamma]_0\,dx$.

Osserviamo ora che siccome $\alpha(x)$ fra 0 e ε non fà oscillazioni, e $\alpha(x)\beta(x)$ tende a zero con x, la $\alpha(x)$ stessa dovrà pure tendere a zero, o dovrà tendervi $\beta(x)$ e quindi anche $\gamma(x)$, e il prodotto $\alpha(x)\gamma(x)$. Ne segue che a questo prodotto sarà applicabile il teorema che abbiamo dato nel paragrafo precedente pel caso del prodotto $\alpha(x)\beta(x)$; e quindi l'essere atta alla integrazione la funzione $[\alpha(x)\lambda_\gamma]_0$ porterà senz'altro che anche l'integrale $\int_0^\varepsilon \alpha(x)\,\gamma(x)\,\varphi(x,h)\,dx$ sia di quel grado di piccolezza che più ci piace; e nel caso in cui anche la funzione dei valori assoluti di λ_γ sia atta alla integrazione fra 0 e ε non vi sarà neppur bisogno che l'integrale $\int_0^x \varphi(x,h)\,dx$ soddisfi a tutte le condizioni del teorema del §. precedente, ma basterà che sod-

disfi a quella di essere sempre numericamente inferiore ad un numero finito A; dunque evidentemente si può ora asserire che „ se $x\varphi(x,h)$ è sempre numericamente inferiore a un numero „ finito B, e se l'integrale $\int_0^x \varphi(x,h)\,dx$ soddisfa alle condizioni „ del teorema del §. precedente, e $f(x)-f(+0)=\alpha(x)\beta(x)$, ove „ $\alpha(x)$ non fà infinite oscillazioni e $\beta(x)$ è atta alla integrazione „ ed è tale che il prodotto $\gamma(x)=\frac{1}{x}\int_0^x \beta(x)\,dx$ sia sempre nu- „ mericamente inferiore a un numero finito, allora se avverrà „ che la funzione $\alpha(x)\lambda_\gamma$, ove λ_γ è uno degli estremi oscillatorii „ $\frac{1}{x}[\beta(x)-\gamma(x)]$ di $\gamma(x)$, resterà atta alla integrazione fra 0 e ε „ anche ridotta ai suoi valori assoluti, la formola (6) sarà ap- „ plicabile alla funzione $f(x)$; e nel caso in cui anche la fun- „ zione dei valori assoluti di λ_γ sia atta alla integrazione fra „ 0 e ε, allora per l'integrale $\int_0^x \varphi(x,h)dx$ potrà tralasciarsi la „ condizione relativa ai massimi o minimi, e basterà che esso „ sia sempre numericamente inferiore a un numero finito A „; e anche in questi casi si avranno con tutta facilità i limiti superiori del valore di θ_h.

Se $\alpha(x)=1$, e $\gamma(x)$ ammette una derivata fra 0 e ε, questo teorema si riduce a quello trovato dal Du Bois-Reymond; e se $\alpha(x)$ fra 0 e ε fosse continua e facesse un numero infinito di oscillazioni, ma però venisse a perderle tutte coll' aggiungervi una funzione di primo grado, il teorema continuerebbe ancora a sussistere purchè allora anche $x\beta(x)$ o $x^2\lambda_\gamma$ avesse per limite zero per $x=+0$, e $x\lambda_\gamma$ o $\beta(x)$ restasse atta alla integrazione fra 0 e ε anche ridotta ai suoi valori assoluti.

38. Del resto, ammettendo ora senz'altro che $\varphi(x,h)$ soddisfi alle condizioni tutte dei §§. 30 e 31, è facile mostrare

anche un teorema molto più generale pel caso che $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ soddisfino ancora alle condizioni poste in principio del §. preced.

Indichiamo con $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_{n-1}, \varphi_n$ n funzioni di x finite e continue fra 0 e ε, e ammettiamo senz' altro che fra 0 e ε (0 al più escl.) esse abbiano le loro derivate determinate finite e continue almeno sino a quelle degli ordini 2.°, 3.°, 4.° .. n°, $(n+1)$° respettivamente, e nè esse nè le loro derivate o i prodotti di queste quantità e di potenze di x facciano fra 0 e ε infinite oscillazioni. Inoltre ammettiamo che se tutte o alcune di queste funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ tendono a zero con x, i respettivi loro ordini d'infinitesimo rapporto a x, oltre essere pienamente determinati, siano i numeri positivi o nulli $m_1, m_2, \ldots, m_n$ tali che le quantità $m_1, m_1+m_2, m_1+m_2+m_3, \ldots, m_1+m_2+\ldots+m_{n-1}+m_n$ non superino i numeri $1, 2, 3, \ldots, n$ respettivamente.

Con queste ipotesi, se poniamo:

$$\gamma(x) = \frac{1}{\varphi_n}\int_0^x \frac{dx}{\varphi_{n-1}}\int_0^x \frac{dx}{\varphi_{n-2}} \cdots \int_0^x \frac{dx}{\varphi_1}\int_0^x \beta(x)\, dx,$$

si vede subito che $\gamma(x)$, quando le sia attribuito un valore finito qualsiasi anche per $x=0$, fra 0 e ε sarà una funzione sempre finita che per x diversa da zero sarà anche continua e avrà la forma $\beta_0 x^{n-m_1-m_2-\ldots-m_n}$ ove l'esponente di x non è negativo, e β_0 è un numero sempre finito perchè tale è l'integrale $\frac{1}{x}\int_0^x \beta(x)\, dx$, e poichè o $\alpha(x)$ tende a zero con x, o vi tende $\beta(x)$, e in quest' ultimo caso accade lo stesso dell' integrale $\frac{1}{x}\int_0^x \beta(x)\, dx$, si vede subito che il prodotto $\alpha(x)\,\beta_0$ avrà per limite zero per $x=+0$.

Oltre a ciò per $n>1$ e x fra 0 e ε (0 al più escl.) $\gamma(x)$ avrà una derivata determinata γ' che sarà anche finita e continua, mentre per $n=1$, se non una derivata, esisterà un estremo oscillatorio γ' di $\gamma(x)$; e (fatta in quest'ultimo caso astrazione da funzioni d'integrale nullo) per determinare γ' si avrà sempre la equazione:

$$\varphi_n \gamma' + \varphi'_n \gamma = \frac{1}{\varphi_{n-1}} \int_0^x \frac{dx}{\varphi_{n-2}} \int_0^x \ldots \int_0^x \frac{dx}{\varphi_1} \int_0^x \beta(x)\, dx,$$

nella quale il secondo membro avrà al solito la forma $\beta_1 x^{n-1-m_1-m_2-\ldots-m_{n-1}}$, ove l'esponente di x non è negativo, e β_1 è finito e tale che il prodotto $\alpha(x)\beta_1$ abbia per limite zero per $x=0$; per modo che, osservando ora che φ'_n, non facendo oscillazioni fra 0 e ε, sarà infinitesimo dell'ordine m_n-1 (*), e potrà anche essere zero assolutamente, si vede subito che il prodotto $x\gamma'$ avrà la forma $\xi_1 x^{n-m_1-m_2-\ldots-m_n}$, ove ξ_1 è un numero finito tale che $\alpha(x)\xi_1$ ha per limite zero per $x=+0$.

Similmente, se $n>2$, $\gamma(x)$ avrà una derivata seconda γ'' fra 0 e ε (0 al più escl.) che sarà ancora finita e continua, mentre se $n=2$ se non una derivata seconda di $\gamma(x)$ esisterà un estremo oscillatorio γ'' di $\gamma'(x)$; e si avrà l'equazione:

$$\varphi_n \varphi_{n-1} \gamma'' + (2\varphi'_n \varphi_{n-1} + \varphi_n \varphi'_{n-1})\gamma' + (\varphi'_n \varphi'_{n-1} + \varphi''_n \varphi_{n-1})\gamma =$$
$$= \frac{1}{\varphi_{n-2}} \int_0^x \frac{dx}{\varphi_{n-3}} \ldots \int_0^x \frac{dx}{\varphi_1} \int_0^x \beta(x)\, dx,$$

che determinerà questa derivata o estremo oscillatorio γ'' (astrazion fatta in quest' ultimo caso da funzioni d'integrale nullo); e in questa equazione il secondo membro avrà al solito la forma $\beta_2 x^{n-2-m_1-m_2-\ldots-m_{n-2}}$, ove β_2 è un numero finito tale che il prodotto $\alpha(x)\beta_2$ ha per limite zero per $x=+0$; mentre per $x=+0$ il coefficiente di γ'' sarà infinitesimo dell'ordine m_n+m_{n-1}, e quelli di γ' e γ saranno degli ordini $m_n+m_{n-1}-1$, $m_n+m_{n-1}-2$ o di ordini superiori e potranno anche essere zero assolutamente; talchè il prodotto $x^2\gamma''$ avrà ancora la forma $\xi_2 x^{n-m_1-m_2-\ldots-m_n}$, ove ξ_2 è al solito un numero finito tale che il prodotto $\alpha(x)\xi_2$ abbia per limite zero per $x=+0$.

(*) Per semplicità di linguaggio noi parliamo quì sempre d'infinitesimi: alcuni però di questi infinitesimi possono essere d'ordine negativo e quindi corrispondere a infiniti.

Così continuando, si vede chiaramente che $\gamma(x)$ fuori del punto $x=0$ avrà le prime $n-1$ derivate $\gamma', \gamma'', .., \gamma^{(n-1)}$ finite e continue, e potrà avere anche la derivata n^a $\gamma^{(n)}$, o tutt' al più questa si ridurrà ad un estremo oscillatorio di $\gamma^{(n-1)}$, e se $t<n$ avremo per determinare $\gamma^{(t)}$ una equazione della forma:

$$\varphi_n \varphi_{n-1} \ldots \varphi_{n-t+1} \gamma^{(t)} + k_{t-1} \gamma^{(t-1)} + k_{t-2} \gamma^{(t-2)} + \ldots + k_1 \gamma' + k_0 \gamma =$$

$$= \frac{1}{\varphi_{n-t}} \int_0^x \frac{dx}{\varphi_{n-t-1}} \ldots \int_0^x \frac{dx}{\varphi_1} \int_0^x \beta(x) dx,$$

mentre per $t=n$ ne avremo un' altra simile:

$$\varphi_n \varphi_{n-1} \ldots \varphi_2 \varphi_1 \gamma^{(n)} + p_{n-1} \gamma^{(n-1)} + \ldots + p_1 \gamma' + p_0 \gamma = \beta(x),$$

ove però $\gamma^{(n)}$ può darsi che sia soltanto un estremo oscillatorio di $\gamma^{(n-1)}$ (all' infuori di funzioni d' integrale nullo); e mentre nella prima di queste il secondo membro ha la forma $\beta_t x^{n-t-m_1-m_2-\ldots-m_{n-t}}$ ove β_t è un numero finito tale che $\alpha(x)\beta_t$ ha per limite zero per $x=+0$, per la seconda può dirsi soltanto che $\alpha(x)\beta(x)$ ha per limite zero per $x=0$.

Nella prima poi il coefficiente di $\lambda^{(s)}$ $(s=0, 1, 2, \ldots, t-1)$ per $x=+0$ è infinitesimo di ordine uguale o superiore a $m_n + m_{n-1} + \ldots + m_{n-t+1} - t + s$, e può anche essere zero assolutamente; nella seconda il coefficiente di $\gamma^{(s)}$ $(s=0, 1, 2, \ldots n-1)$ è infinitesimo di ordine uguale o superiore a $m_1 + m_2 + \ldots + m_n - n + s$, e può anch' esso essere zero assolutamente; e infine i coefficienti di $\gamma^{(t)}$ e $\gamma^{(n)}$ nella prima e nella seconda sono infinitesimi degli ordini $m_n + m_{n-1} + \ldots + m_{n-t+1}$, $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$; talchè procedendo successivamente, come nei casi precedenti, si vede chiaramente che per $t<n$ e anche per $t=n$ i prodotti $x^t \gamma^{(t)}$ avranno la forma $\xi_t x^{n-m_1-m_2-\ldots-m_n}$ ove ξ_t è un numero finito tale che il prodotto $\alpha(x)\xi_t$ ha per limite zero per $x=+0$.

Ma valendosi della formola precedente che esprime $\beta(x)$ per $\gamma, \gamma', \gamma'', \ldots \gamma^{(n)}$, si trova che:

$$\int_0^\varepsilon \alpha(x)\beta(x)\varphi(x,h)dx = \sum_0^{n-1} \int_0^\varepsilon \alpha(x) p_s \gamma^{(s)} \varphi(x,h)dx + \int_0^\varepsilon \alpha(x)\varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_n\gamma^{(n)}\varphi(x,h)d$$

intendendo quì che γ^0 indichi $\gamma(x)$, e ammettendo, come già dicemmo, che $\gamma^{(n)}$ invece della derivata n^a di $\gamma(x)$ che può non esistere, possa anche rappresentare l' estremo oscillatorio di $\gamma^{(n-1)}$ all' infuori di funzioni d' integrale nullo; dunque, poichè per quanto abbiamo visto sugli ordini d' infinitesimo di p_s, e $x^t\gamma^{(t)}$, i prodotti $\alpha(x)p_s\gamma^{(s)}$ tendono a zero con x, e inoltre la derivata λ_s (o estremo oscillatorio) di $p_s\gamma^{(s)}$ è $p'_s\gamma^{(s)}+p_s\gamma^{(s+1)}$, e questa è tale che il prodotto $\alpha(x)x\lambda_s$ ha per limite zero per $x=+0$, basta ora applicare il teorema del §. 31. per concludere subito che la somma $\sum\limits_0^{n-1}$ del secondo membro della formola precedente ha per limite zero per $h=\infty$ quando, come supponiamo, $\varphi(x, h)$ è una funzione che soddisfa alle solite condizioni poste nello stesso paragrafo 31.

Segue da ciò che quando il prodotto $\alpha(x)\varphi_1\varphi_2\dots\varphi_n\gamma^{(n)}$ che figura nell'ultimo integrale soddisfi a una delle condizioni dei paragrafi precedenti,per es. a quella che diviso per x resti atto alla integrazione anche ridotto ai suoi valori assoluti, l' integrale $\int_0^\varepsilon \alpha(x)\beta(x)\varphi(x,h)dx$ avrà per limite zero per $h=\infty$; dunque si può ora evidentemente concludere in generale che:
„ se $\varphi(x, h)$ soddisfa alle condizioni poste nel §. 31. e
„ $f(x)-f(+0)=\alpha(x)\beta(x)$ ove fra 0 e ε, $\alpha(x)$ è finita e non fà
„ oscillazioni, $\beta(x)$ è atta all' integrazione e, anche se diviene
„ infinita per $x=+0$, è tale che il prodotto $\frac{1}{x}\int_0^x \beta(x)dx$ sia
„ sempre numericamente inferiore a un numero finito, allora
„ per la validità della formola (6) basterà che, se $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$
„ sono n funzioni che soddisfano alle condizioni poste in
„ principio di questo paragrafo, il rapporto $\frac{\alpha(x)\varphi_1\varphi_2\dots\varphi_n\gamma^{(n)}}{x}$,
„ ove $\gamma^{(n)}$ è la derivata n^a o l'estremo oscillatorio della de-
„ rivata $(n-1)^a$ dell' integrale

„ $\gamma(x) = \frac{1}{\varphi_n}\int_0^x \frac{dx}{\varphi_{n-1}}\int_0^x \frac{dx}{\varphi_{n-2}} \dots \int_0^x \frac{dx}{\varphi_1}\int_0^x \beta(x)\, dx$, resti atto
„ all' integrazione fra 0 e ε anche ridotto ai valori assoluti, o
„ soddisfi a una delle condizioni dei paragrafi precedenti „.

Particolarizzando il numero n e le funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ si ottengono altrettanti teoremi speciali; e così per es. supponendo $n=1$ e $\varphi_1 = x$ si ritrova quello del §. precedente; e supponendo $\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_n = x$, o $\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_{n-1} = 1$, $\varphi_n = x^n$, la condizione ora trovata viene relativa all' integrale n^{uplo} $\gamma(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{dx}{x}\int_0 \frac{dx}{x} \dots \int_0^x \frac{dx}{x}\int_0^x \beta(x) dx$, o all'altro $\gamma(x) = \frac{1}{x^n}\int_0^x dx \int_0^x dx \dots \int_0^x dx \int_0^x \beta(x)\, dx$, e caso per caso si troverà con tutta facilità anche un limite superiore pel valore assoluto dell' integrale $\int_0^\varepsilon \{ f(x) - f(+0 \} \varphi(x, h)\, dx$.

Nè deve tralasciarsi di osservare che se ci poniamo nel caso particolare di $\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_{n-1} = 1$, $\varphi_n = x^n$,

$\gamma\ (x) = \frac{1}{x^n}\int_0^x d\,x \int_0^x dx \dots \int_0^x dx \int_0^x \beta(x)\, d\, x$, dal calcolo differenziale e dalle proprietà degli estremi oscillatorii si ha subito:

$$\gamma^{(n)} = \frac{\beta(x)}{x^n} - n_1\, n \frac{\int_0^x \beta(x)\, dx}{x^{n+1}} + n_2\, n\, (n+1) \frac{\int_0^x dx \int_0^x \beta(x)\, dx}{x^{n+2}} -$$

$$- \dots \dots \pm n(n+1)(n+2) \dots (2\,n-1) \frac{\int_0^x dx \int_0^x dx \dots \int_0^x \beta(x) dx}{x^{2n}},$$

e quindi:

$$\frac{\alpha(x)\varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_n\gamma^{(n)}}{x}=\frac{\alpha(x)}{x}\left\{\beta(x)-n_1 n\frac{\int_0^x\beta(x)dx}{x}+n_2 n(n+1)\frac{\int_0^x dx\int_0^x\beta(x)dx}{x^2}-\right.$$

$$\left.-\ldots\pm n(n+1)\ldots(2n-1)\frac{\int_0^x dx\int_0^x dx\ldots\int_0^x\beta(x)\,dx}{x^n}\right\},$$

ove n_1, n_2, ... sono i soliti coefficienti binomiali.

Per $n=2$ e $\gamma(x)=\frac{1}{x}\int_0^x dx\int_0^x\beta(x)\,dx$ si ha dunque in particolare:

$$\alpha(x)\,x\,\gamma''=\frac{\alpha(x)}{x}\left\{\beta(x)-4\frac{\int_0^x\beta(x)\,dx}{x}+6\frac{\int_0^x dx\int_0^x\beta(x)dx}{x^2}\right\}.$$

39. Ammettendo che la funzione $\varphi(x, h)$ soddisfi a tutte le condizioni del §. 32. (che sono le più restrittive fra quelle che via via abbiamo posto), continuiamo a considerare l'integrale $\int_0^\varepsilon\alpha(x)\,\beta(x)\,\varphi(x, h)\,dx$, supponendo però ora per semplicità che le funzioni $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ tendano ambedue a zero per $x=+0$, e ciascuna di esse soddisfi a una almeno delle condizioni di validità della formola $\lim\int_0^\varepsilon\alpha(x)\,\varphi(x, h)\,dx=0$, $\lim\int_0^\varepsilon\beta(x)\,\varphi(x,h)\,dx=0$ trovate nei paragrafi precedenti.

Allora se fra 0 e ε sarà in valore assoluto $\alpha(x)\,\beta(x)<\sigma$, avremo come nei §§. 30 e 32:

$$\int_0^\varepsilon\alpha(x)\,\beta(x)\,\varphi(x, h)\,dx=10\,\theta\,A\,\sigma+\sum_1^{n-2}\int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}}\{\alpha(x)-\alpha(\alpha_s)\}\,\beta(x)\,\varphi(x, h)dx+$$

$$+\sum_1^{n-2}\int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}}\{\beta(x)-\beta(\alpha_s)\}\,\alpha(\alpha_s)\,\varphi(x,h)\,dx,$$

con θ compreso fra 0 e 1: e se $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ non faranno oscillazioni fra 0 e ε, applicando a ciascuna delle due somme del secondo membro il processo stesso con cui si studiò nel §. 30. la prima delle somme stesse, si vedrà che per ε abbastanza piccolo il loro aggregato è piccolo a piacere.

Se poi $\alpha(x)$ fra 0 e ε non fà oscillazioni, e $\beta(x)$ invece di soddisfare a questa condizione soddisfa alle altre $D < c\,\delta$, o $\lim D \log \delta = 0$ dei §§. 28. e 29, allora studiando la prima somma col processo ora indicato e la seconda con quelli dei §§. 28 e 29 si vedrà che ciascuna di queste somme è piccola a piacer nostro dipendentemente da ε; e lo stesso accadrà se $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ soddisfano ambedue alla condizione $D < c\,\delta$, o $\lim D \log \delta = 0$.

Se poi $\alpha(x)$ soddisfa alla condizione di non fare oscillazioni fra 0 e ε o alle altre $D < c\delta$, o $\lim D \log \delta = 0$, e la funzione $\beta(x)$ è tale che, avendosi $\beta(x) = \rho(x)\,\omega(x)$ con $\rho(x)$ privo di oscillazioni fra 0 e ε e sempre finito, il prodotto $\rho(x)\,x\,\lambda_{\omega}$ abbia per limite zero per $x = +0$, allora applicando i processi precedenti alla prima somma, e spezzando la seconda somma in due altre come si fece al §. 30. per la somma che allora considerammo $\sum_{1}^{n-2} \int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}} [\alpha(x)\beta(x) - \alpha(\alpha_s)\,\beta(\alpha_s)]\,\varphi(x, h)\,dx$, e poi ripetendo i ragionamenti del §. 30. stesso, si vedrà ancora che l' integrale $\int_0^{\varepsilon} \alpha(x)\,\beta(x)\,\varphi(x\,,\,h)\,dx$, dipendentemente da ε, e dopo che h sarà divenuto abbastanza grande, sarà minore di quel numero che più ci piace; e lo stesso pure accadrà se, essendo $\alpha(x) = \rho_0(x)\,\omega_0(x)$, e $\beta(x) = \rho(x)\,\omega(x)$, con $\rho_0(x)$ e $\rho(x)$ finite e prive di oscillazioni fra 0 e ε, i prodotti $\rho_0(x)\,x\,\lambda_{\omega_0}$, $\rho(x)\,x\,\lambda_{\omega}$ avranno per limite zero per $x = +0$, essendo al solito λ_{ω} e λ_{ω_0} estremi oscillatorii dei rapporti incrementali di $\omega(x)$ e $\omega_0(x)$.

E se $\alpha(x)$ soddisfacendo ad una qualsiasi delle tre condizioni ora indicate, e essendo $\beta(x) = \rho(x)\,\omega(x)$ con $\rho(x)$ finito e privo di oscillazioni fra 0 e ε e $\omega(x)$ sempre finito, il prodotto

$\rho(x)\,x\,\lambda_\omega$ non avrà per limite zero per $x=+0$, ma λ_ω si scomporrà in due fattori $\mu(x)$, $\nu(x)$ il primo dei quali $\mu(x)$ è tale che $\rho(x)\,\mu(x)$ ha per limite zero per $x=+0$, e il secondo, oltre a crescere indefinitamente senza oscillare quando x tende a zero, ha un estremo oscillatorio atto all' integrazione fra ε_1 e ε con $0<\varepsilon_1<\varepsilon$, e gode della proprietà che $x\,\nu(x)$ col tendere a zero di x non và decrescendo, mentre il prodotto

$\rho(x)\int_\varepsilon^x \omega(x)\,\nu(x)dx$ per $x=+0$ ha un limite determinato e finito,

allora applicando i relativi processi precedenti alla prima somma collo spezzarla ove occorra in due parti, e spezzando pure in due parti la seconda somma, e poi ripetendo i ragionamenti del §. 32. (con quelle leggerissime modificazioni che sono dovute alla circostanza che ora alla quantità ivi indicata con $\alpha(\alpha_s)$ nella seconda somma è sostituita l' altra $\alpha(\alpha_s)\,\rho(\alpha_s)$ ec.) si troverà

ancora che l' integrale $\int_0^\varepsilon \alpha(x)\,\beta(x)\,\varphi(x, h)\,d\,x$ dipendentemente

da ε sarà minore di quel numero che più ci piace dopo che h sarà divenuto abbastanza grande. Lo stesso poi accadrà se essendo anche $\alpha(x)$ della forma $\alpha(x)=\rho_0(x)\,\omega_0(x)$, con $\rho_0(x)$ priva di oscillazioni, e $\omega_0(x)$ sempre finito, saranno soddisfatte per $\rho_0(x)$ e $\omega_0(x)$ le condizioni poste ora per $\rho(x)$ e $\omega(x)$; e collo spezzare ove occorra le stesse somme, e col ripetere i ragionamenti del §. 36. si vedrà che lo stesso pure accade se le funzioni quì indicate con $\rho(x)$ e $\omega(x)$ o le altre $\rho_0(x)$ e $\omega_0(x)$ invece che alle condizioni che ora si avevano soddisfano all'altra che le quantità λ_ω o λ_{ω_0} siano atte alla integrazione fra ε_1 e ε $(0<\varepsilon_1<\varepsilon)$ e i prodotti $\rho(x)\,\lambda_\omega$, o $\rho_0(x)\,\lambda_{\omega_0}$ restino atti all'integrazione fra 0 e ε anche ridotti ai loro valori assoluti.

Similmente si osservi che se $\alpha(x)$ soddisfarà ad una qualsiasi delle varie condizioni ora ricordate, e essendo ancora $\beta(x)=\rho(x)\,\omega(x)$, con $\rho(x)$ finito e privo di oscillazioni fra 0 e ε,

l'integrale $\frac{1}{x}\int_0^x \omega(x)\,dx$ sarà finito fra 0 e ε e l' altro

$$\gamma(x)=\frac{1}{\varphi_n}\int_0^x \frac{dx}{\varphi_{n-1}}\int_0^x \ldots \int_0^x \frac{dx}{\varphi_1}\int_0^x \omega(x)\,dx\,,$$

ove $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ soddisfano alle condizioni poste in principio del paragrafo precedente, sarà tale che la sua derivata n^a o l'estremo oscillatorio $\gamma^{(n)}$ della sua derivata $(n-1)^a$ moltiplicato per $\frac{\rho(x)\,\varphi_1\,\varphi_2\ldots\varphi_n}{x}$ resti atto alla integrazione anche ridotto ai suoi valori assoluti, allora la formola del paragrafo precedente:

$$\int_0^\varepsilon \alpha(x)\,\beta(x)\varphi(x,h)\,dx=\sum_0^{n-1}\int_0^\varepsilon \alpha(x)\,\rho(x)\,\mathrm{P}_s\,\gamma^{(s)}\,\varphi(x,h)\,dx+$$
$$+\int_0^\varepsilon \alpha(x)\,\rho(x)\,\varphi_1\,\varphi_2\ldots\varphi_n\,\gamma^{(n)}\,\varphi(x,h)\,dx,$$

coll' applicare agli integrali del secondo membro che compariscono sotto il segno $\sum_0^{n-1}$ i risultati ora ottenuti, ci mostra che l' integrale $\int_0^\varepsilon \alpha(x)\beta(x)\varphi(x,h)dx$, dipendentemente da ε, sarà minore di quel numero che più ci piace dopo che h sarà divenuto abbastanza grande; e lo stesso accadrà se, avendosi anche $\alpha(x)=\rho_0(x)\,\omega_0(x)$ con $\rho_0(x)$ e $\omega_0(x)$ analoghe alle $\rho(x)$ e $\omega(x)$ precedenti, queste funzioni $\rho_0(x)$ e $\omega_0(x)$ soddisfaranno alle stesse condizioni delle $\rho(x)$ e $\omega(x)$, perchè allora ogni termine della somma del secondo membro della formola precedente potrà, trasformarsi colla equazione:

$$\int_0^\varepsilon \alpha(x)\,\rho(x)\mathrm{P}_s\,\gamma^{(s)}\,\varphi(x,h)dx=\sum_0^{n'-1}\int_0^\varepsilon \rho_0(x)\,\mathrm{Q}_{s'}\,\gamma_0^{(s')}\rho(x)\,\mathrm{P}_s\,\gamma^{(s)}\,\varphi(x,h)dx+$$
$$+\int_0^\varepsilon \rho(x)\,\mathrm{P}_s\,\gamma^s\,\rho_0(x)\,\psi_1\,\psi_2\ldots\psi_{n'}\,\gamma_0^{(n')}\,\varphi(x,h)\,dx,$$

ove $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n'-1}, Q_s', \gamma_0^{(s')}$ sono le funzioni analoghe alle $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, P_s, \gamma^{(s)}$ relative ora alla funzione $\alpha(x)$; e in questa equazione gli integrali che compariscono nella somma $\sum_1^{n'-1}$ hanno per limite zero per $h=\infty$ per la ragione che le funzioni che vi figurano a moltiplicare il $\varphi(x, h)$ soddisfano alla terza delle condizioni indicate poc' anzi, e l'ultimo integrale ha pure per limite zero per $h=\infty$, perchè il prodotto $\rho(x) P_s \gamma^{(s)}$ per $x=+0$ ha per limite zero, e l'altro $\frac{\rho_0(x) \psi_1 \psi_2 \ldots \psi_{n'} \gamma_s^{(n')}}{x}$ resta atto alla integrazione anche ridotto ai suoi valori assoluti.

Un ugual risultato si ha se $\alpha(x)$ soddisfa alla condizione del §. 27, quella cioè che il quoziente $\frac{\alpha(x)}{x}$ sia atto all' integrazione anche ridotto ai suoi valori assoluti; e anzi allora non vi è neppure bisogno di porre per $\beta(x)$ altra condizione all'infuori di quella di essere sempre finita; dunque riassumendo ora, coll' osservare che se $f(x)$ e $F(x)$ sono due funzioni tali che si abbia;

$$f(x) = f(+0) + \alpha(x) \ , \qquad F(x) = F(+0) + \beta(x) \, ,$$

ove $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ per $x = +0$ hanno per limite zero, sarà:

$$f(x) F(x) = f(+0) F(+0) + F(+0) \alpha(x) + f(+0) \beta(x) + \alpha(x) \beta(x) \, ,$$

si può ora evidentemente concludere che „ se la funzione $f(x)$ „ fra 0 e ε è finita e atta alla integrazione e $f(+0)$ ha un „ significato, ad essa sarà applicabile la formola (6) tutte le „ volte che soddisfi ad una delle condizioni seguenti:

„ I. di non fare oscillazioni fra 0 e ε;

„ II. che il rapporto incrementale destro $\frac{f(x)-f(+0)}{x}$ di „ $f(x)$ pel punto $x=0$ resti atto alla integrazione negli intorni a destra del punto zero anche ridotto ai suoi valori „ assoluti;

„ III. che per ε abbastanza piccolo in ogni intervallo δ fra 0 e ε che non termini al punto zero sia $D_\delta < c\,\delta$, o sia

„ $D_{\delta} \log \delta < \sigma$, essendo D_{δ} l'oscillazione in questo intervallo, c
„ un numero finito, e σ un numero positivo piccolo a piacere;

„ IV. che essendo $f(x) - f(+0) = \alpha(x) = \rho(x)\,\omega(x)$, con
„ $\rho(x)$ privo di oscillazioni fra 0 e ε e $\omega(x)$ continua fra 0 e ε
„ (0 al più escl.) e sempre finita, sia $\lim \rho(x)\,x\,\lambda_{\omega} = 0$, es-
„ sendo λ_{ω} l' estremo oscillatorio di ω;

„ V. che essendo ancora $f(x) - f(+0) = \alpha(x) = \rho(x)\,\omega(x)$,
„ con $\rho(x)$ e $\omega(x)$ dotate delle proprietà ora indicate, ma
„ senza che il prodotto $\rho(x)\,x\,\lambda_{\omega}$ abbia per limite zero per
„ $x = +0$, si trovi che λ_{ω} si scompone in due fattori $\mu(x)$, $\nu(x)$
„ il primo dei quali $\mu(x)$ è tale che $\rho(x)\,\mu(x)$ ha per limite zero
„ per $x = +0$, e il secondo $\nu(x)$, oltre a crescere indefinitamente
„ senza oscillare quando x tende a zero, ha un estremo oscil-
„ latorio atto all' integrazione fra ε_1 e ε essendo $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$,
„ gode della proprietà che $x\,\nu(x)$ col tendere a zero di x non
„ và decrescendo, e se $\chi(x)$ è una funzione che per x diverso
„ da zero fra 0 e ε ha per derivata $\beta(x)\,\nu(x)$, il prodotto
„ $\alpha(x)\,\chi(x)$ per $x = +0$ ha un limite determinato e finito;
„ talchè se $\alpha(x)$ non tende a zero con x il prodotto $\beta(x)\,\nu(x)$
„ dovrà essere atto alla integrazione fra 0 e ε;

„ VI. che essendo ancora $f(x) - f(+0) = \rho(x)\,\omega(x)$, con $\rho(x)$
„ privo di oscillazioni fra 0 e ε, e $\omega(x)$ continuo, almeno fuori
„ del punto zero, e sempre inferiore a un numero finito, λ_{ω} sia
„ atto all'integrazione fra ε_1 e ε con $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$, e la funzione
„ $\rho(x)\,\lambda_{\omega}$ sia atta all' integrazione fra 0 e ε anche ridotta ai
„ valori assoluti;

„ VII. che finalmente essendo sempre $f(x) - f(+0) =$
„ $= \rho(x)\,\omega(x)$, con $\rho(x)$ privo di oscillazioni fra 0 e ε, e $\omega(x)$
„ qualunque purchè atto alla integrazione, e $\varphi_1, \varphi_2, .., \varphi_n$ soddi-
„ sfacendo alle condizioni poste in principio del paragrafo pre-
„ cedente. l' integrale $\frac{1}{x}\int_0^x \omega(x)\,dx$ fra 0 e ε sia sempre numerica-

„ mente inferiore a un numero finito, e l' altro

„ $\gamma(x)=\frac{1}{\varphi_n}\int_0^x \frac{dx}{\varphi_{n-1}}\int_0^x \dots \int_0^x \frac{dx}{\varphi_1}\int_0^x \omega(x)dx$ sia tale che la sua

„ derivata n^a o l' estremo oscillatorio $\gamma^{(n)}$ della sua derivata

„ $(n-1)^a$ moltiplicato per $\frac{\rho(x)\,\varphi_1\,\varphi_2\dots\varphi_n}{x}$ resti atto alla in-

„ tegrazione anche ridotto ai suoi valori assoluti.

„ E se al tempo stesso la funzione $F(x)$ fra 0 e ε è finita

„ e atta alla integrazione e $F(+0)$ ha un significato, e soddisfa

„ anch' essa ad una di queste condizioni, la formola (6), oltre

„ essere applicabile a ciascuna delle funzioni $f(x)$ e $F(x)$ sepa-

„ ratamente, si applicherà anche al loro prodotto $f(x)\,F(x)$ „.

Per abbreviare, le condizioni suindicate saranno da noi qualificate coi nomi di condizione I, II, III, IV, V, VI e VII respettivamente; e come già notammo al §. 38. si può osservare che alla condizione VII potrebbe sostituirsi l' altra che il prodotto $\rho(x)\,\varphi_1\,\varphi_2\dots\varphi_n\,\gamma^{(n)}$ soddisfacesse invece a una delle condizioni I, III, IV, V o VI. Naturalmente poi la condizione VII per l' arbitrarietà che resta nelle funzioni $\varphi_1, \varphi_2, .., \varphi_n$ e nel numero intero n, che può essere anche grande a piacere, dà luogo a molte condizioni speciali delle quali ora può tornare utile l' una ora l' altra come si disse al §. 38.

Per ciascuna poi delle sette condizioni sopra enunciate $\varphi(x, h)$ dovrà sempre soddisfare a quelle speciali che via via respettivamente le abbiamo imposte, e potremo sempre prendere per $\varphi(x, h)$ una funzione che soddisfi alle condizioni del §. 32, e in particolare anche $\varphi(x, h)=\frac{\operatorname{sen} h x}{\operatorname{sen} x}$.

40. Merita inoltre di essere notato che tolti i casi in cui $f(x)$ soddisfa alla condizione I e VI o a quella parte della condizione III che è espressa dalla formola $D_\delta < c\,\delta$, in tutti gli altri casi che ora abbiamo indicato, fra le varie condizioni cui deve soddisfare $\varphi(x,h)$ vi è sempre quella che il prodotto $x\,\varphi(x, h)$ resti numericamente inferiore a un numero finito B pei valori di x fra 0 e ε e per qualunque valore di h; e quando in

dati studi occorresse di toglier questa restrizione rispetto a $\varphi(x, h)$ allora bisogna modificare alquanto le condizioni enunciate sopra rispetto a $f(x)$.

Così per es., quando, invece di $x\varphi(x,h)$, resti finito e inferiore a B soltanto il prodotto $x^\nu \varphi(x, h)$ con $\nu > 1$, allora, osservando che la somma $\sum_1^{n-2} D_s \int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}} \varphi_1(x, h)\, dx$ considerata al §. 29. è inferiore a $D_h B \int_{\alpha_1}^{\varepsilon} \frac{dx}{x^\nu}$, ovvero a $\frac{D_h B}{1-\nu}\left(\alpha_1^{1-\nu} - \varepsilon^{1-\nu}\right)$ si vede che alla condizione III. nella parte che è espressa dalla diseguaglianza $D_\delta \log \delta < \sigma$ bisogna sostituire l'altra $D_\delta \delta^{\nu-1} < \sigma$.

Similmente, riprendendo gli integrali

$\int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}} \alpha(\alpha_s)\, \lambda_s\, (x-\alpha_s)\, \varphi(x,h)\, dx$ considerati al §. 30, si vede che nel caso attuale la loro somma è numericamente inferiore a $\frac{B\, p^2}{2} \sum \alpha(\alpha_s)\, \lambda_s^0\, \alpha_s^{2-\nu} \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_s}\right)^2$; e quindi si trova al modo stesso che in questo caso alla condizione IV. $\lim \rho(x)\, x\, \lambda_\omega = 0$, bisogna sostituire l'altra $\lim \rho(x)\, x^{2-\nu}\, \lambda_\omega = 0$; e in modo simile si potrebbero trasformare la condizione V e la VII.

Può darsi poi (e ciò accade per es. per gli sviluppi in funzioni sferiche) che $\varphi(x, h)$, oltre a portare un fattore che cresce indefinitamente all'impiccolire di x, come nel caso di $\varphi(x,h) = \frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x}$, ne abbia uno che cresce indefinitamente con h o con $\frac{1}{\alpha_1}$; e quì mi piace di accennare qualche cosa relativamente al caso in cui $\varphi(x, h)$ è della forma $\frac{\varphi_1(\alpha_1)\varphi_2(x, h)}{x^\nu}$, ove $\varphi_1(\alpha_1)$ diviene infinito con $\frac{1}{\alpha_1}$ in modo che il prodotto $\alpha_1^\mu\, \varphi_1(\alpha_1)$ re-

sti finito, e $\varphi_2(x, h)$ è sempre inferiore a un numero finito B, e del resto sono soddisfatte tutte le altre condizioni poste sopra per $\varphi(x, h)$.

In questo caso la somma $\sum_1^{n-2} D_s \int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}} \varphi_1(x, h)\, d x$ considerata al §. 29. è inferiore a $\frac{D_h \varphi_1(\alpha_1) B}{1-\nu}\left(\alpha_1^{1-\nu} - \varepsilon^{1-\nu}\right)$ o a $D_h \varphi_1(\alpha_1) B (\log \delta - \log \varepsilon)$ secondochè ν è diverso da uno o uguale ad uno; e quindi, ammesso che sia $\varphi_1(\alpha_1) = \frac{k_1}{\alpha_1^{\mu}}$ ove k_1 è inferiore a un numero finito k_0 „ alla condizione III nella „ parte $D_\delta \log \delta < \sigma$ dovranno evidentemente sostituirsi le altre „ $\frac{D_\delta}{\delta^\mu} < \sigma$ quando $\nu < 1$; $\frac{D_\delta}{\delta^{\mu+\nu-1}} < \sigma$ quando $\nu > 1$; e „ $\frac{D_\delta \log \delta}{\delta^\mu} < \sigma$ quando $\nu = 1$ „.

Riprendendo poi gli integrali $\int_{\alpha_s}^{\alpha_{s+1}} \alpha(\alpha_s)\, \lambda_s\, (x - \alpha_s) \varphi(x, h)\, d x$ del §. 30, si vedrà ora che la loro somma è numericamente inferiore a $\frac{B\, k_0}{2\alpha_1^\mu} \sum_1^{n-2} \frac{\alpha(\alpha_s)\, \lambda^0_s (\alpha_{s+1} - \alpha_s)^2}{\alpha_s^\nu}$ ovvero a $\frac{B p k_0}{2} \sum_1^{n-2} \frac{\alpha(\alpha_s)\, \lambda^0_s\, \alpha_1^{1-\mu}}{\alpha_s^\nu} (\alpha_{s+1} - \alpha_s)$, e se $\mu \leq 1$ essa sarà anche inferiore a $\frac{B\, p\, k_0}{2} \sum_1^{n-2} \alpha(\alpha_s)\, \lambda^0_s\, \alpha_s^{1-\mu-\nu} (\alpha_{s+1} - \alpha_s)$, ovvero a $\frac{M\, B\, p\, k_0\, \varepsilon}{2}$ essendo M il massimo valore assoluto di $\alpha(\alpha_s)\, \lambda^0_s\, \alpha_s^{1-\mu-\nu}$; talchè ripetendo i ragionamenti del §. 30 si vedrà che in questo caso di $\psi(\alpha_1) = \frac{k_1}{\alpha_1^\mu}$ con $\mu \leq 1$, ec. „ alla

condizione IV può sostituirsi l' altra che „ il prodotto
„ $\rho(x)\,\lambda_\omega\, x^{1-\mu-\nu}$ resti numericamente inferiore a un certo numero
„ finito, senza avere ora per $\varphi(x, h)$ alcuna condizione rapporto
„ alla serie $\sum\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_s}\right)^2$ „. — In modo simile si trasformeranno le
„ condizioni V e VII.

41. Fin ora abbiamo ammesso che la funzione $f(x)$ da noi considerata negli integrali $\int f(x)\,\varphi(x,h)\,d\,x$ fosse sempre finita nell'intervallo di integrazione. Quando però $\varphi(x, h)$ per valori convenienti di a e b per es. positivi, soddisfa alle solite condizioni:

$$\lim_{h=\infty}\int_a^b \varphi(x, h)\,dx = 0, \qquad \lim_{h=\infty}\int_0^b \varphi(x,h)\,dx = G,$$

e per h finito è sempre finita nell' intervallo nel quale si considera, è facile vedere che le formole:

$$(12)\qquad \lim\int_a^b f(x)\varphi(x, h)dx=0, \quad \lim\int_0^b f(x)\,\varphi(x, h)dx=Gf(+0),$$

continuano a susssistere anche quando $f(x)$, pur soddisfacendo a tutte le altre condizioni che abbiamo posto respettivamente per l'una e per l'altra delle formole stesse, cessa di soddisfare a quella di mantenersi sempre finita, e diviene invece infinita in un gruppo finito o infinito di punti di prima specie, purchè però essa resti atta alla integrazione anche riducendola alla funzione $f_1(x)$ dei suoi valori assoluti, e purchè nel caso della seconda formola i punti d' infinito (*) siano diversi dal punto $x=0$.

Osserviamo infatti dapprima che, sotto queste ipotesi, gli integrali $\int_a^b f(x)\,\varphi(x,h)\,dx$, $\int_0^b f(x)\,\varphi(x,h)\,dx$ avranno un si-

(*) A scanso di equivoci ricordiamo che nel caso dei gruppi infiniti di prima specie figurano come punti d'infinito anche i punti-limiti del gruppo (m. l. §. 218).

gnificato per ogni valore finito di h: e siccome supponiamo che $f(x)$ non sia infinita per $x=0$, se si pone:

$$\int_0^b f(x)\,\varphi(x\,,h)\,dx=\left(\int_0^a+\int_a^b\right)f(x)\varphi(x\,,h)\,dx,$$

si potrà sempre intendere di avere preso per a un numero diverso da zero e compreso fra 0 e b tale che fra 0 ed a non cadano punti d'infinito di $f(x)$, e allora l'integrale $\int_0^a f(x)\,\varphi(x\,,h)\,dx$ sarà precisamente come quelli considerati nei paragrafi precedenti; talchè per dimostrare che nei casi suindicati continuano a sussistere le formole (12) basterà limitarsi a studiare gli integrali della forma $\int_a^b f(x)\,\varphi(x\,,h)\,dx$, ove $0<a<b$.

Considerando dunque l'integrale $\int_a^b f(x)\,\varphi(x\,,h)\,dx$, supponiamo che se $f(x)$ diviene infinita in un gruppo di punti di ordine $\nu\geq 0$ fra a e b (a e b incl.), essendo $0<a<b$, essa resti atta alla integrazione anche riducendola alla funzione $f_1(x)$ dei suoi valori assoluti; e valendosi del teorema del §. 13. immaginiamo racchiusi i punti d'infinito di $f(x)$ e $f_1(x)$ in un numero finito d'intervalli $i_1, i_2, .., i_t, ..$ tali che la somma degli integrali $\int_{i_1} f_1(x)\,dx$, $\int_{i_2} f_1(x)\,dx, \ldots$ estesi a questi intervalli sia minore di quel numero che più ci piace σ.

Allora se φ_0 è il limite superiore dei valori assoluti di $\varphi(x, h)$ per x compreso fra a e b (a e b incl.) e qualunque sia h, ognuno degli integrali $\int_{i_t} f(x)\,\varphi(x,h)\,dx$ è numericamente inferiore a $\varphi_0\int_{i_t} f_1(x)\,dx$ (m. l. §. 225), e quindi la loro som-

ma sarà inferiore in valore assoluto a $\varphi_0 \sum \int_{i_t} f_1(x)dx$ o a $\varphi_0\,\sigma$.

Tolti poi gli intervalli i_t, negli intervalli restanti (che saranno in numero finito) la funzione $f(x)$ è sempre finita, e pel teorema del §. 22. gli integrali $\int f(x)\,\varphi(x\,,h)\,dx$ estesi a questi ultimi intervalli col crescere indefinito di h potranno rendersi minori di quel numero che più ci piace; quindi evidentemente può dirsi così dimostrato quanto volevamo.

Aggiungiamo che nel caso particolare di $\varphi(x,h)=\dfrac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x}$, per questa dimostrazione e per la formola (5) del §. 23. si può dire che se $0<a<b\leq\frac{\pi}{2}$, si avrà in valore assoluto:

$$(13)\qquad \int_a^b f(x)\frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x}dx<\frac{4\,p\,\pi\,\lambda}{h\operatorname{sen} a}+\frac{\lambda(b-a)}{h\operatorname{sen}^2 a}+\frac{1}{\operatorname{sen} a}\left\{\sum_1^p\delta_s D_s+\sum\int_{i_t} f_1(x)dx\right\}$$

essendo λ il limite superiore dei valori assoluti di $f(x)$ negli intervalli $\xi_1\,,\xi_2\ldots$ che restano in $(a\,,b)$ dopo di aver tolti gli intervalli i_t, e p il numero degli intervalli in cui bisogna scomporre gli stessi intervalli $\xi_1\,,\xi_2\ldots$ quando si vuole che la somma corrispondente $\sum_1^p \delta_s\,D_s$ sia minore di quel numero che più ci piace σ.

Inoltre aggiungiamo che se i punti d' infinito di $f(x)$ fra a o b sono in numero finito, e la funzione $\varphi(x\,,h)$ anche col crescere indefinito di h fà sempre soltanto un numero di oscillazioni fra a e b non superiore a un numero finito (il che però non si verifica quando $\varphi(x\,,h)=\dfrac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x}$), allora non è necessario porre la condizione che $f(x)$ resti atta alla integrazione anche ridotta ai suoi valori assoluti; perchè se il numero delle oscillazioni di $\varphi(x\,,h)$ fra a e b non è mai superiore a p, applicando il teorema del §. 207 del mio libro a ciascuno degli

integrali definiti singolari relativi ai punti d' infinito, e poi passando alla considerazione dei contributi corrispondenti $\int_{\alpha_1-\varepsilon_1}^{\alpha_1+\varepsilon'_1}$, $\int_{\alpha_2-\varepsilon_2}^{\alpha_2+\varepsilon'_2}$ ... si vede che ciascuno di questi integrali può rendersi minore di $4 p \varphi \sigma$, quando si prendano $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots$ in modo che gli integrali definiti singolari $\int_{\alpha_1-\varepsilon_1}^{\alpha_1-\delta_1} f(x)\,dx$, $\int_{\alpha_1+\delta'_1}^{\alpha_1+\varepsilon'_1} f(x)\,dx$, .. ove $0<\delta_1<\varepsilon_1$, $0<\delta'_1<\varepsilon_1'$, ... siano numericamente inferiori a σ.

42. Dobbiamo pure avvertire che la proprietà dimostrata nel paragrafo precedente pel caso particolarissimo di $\varphi(x,h)=\frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x}$, e di un numero finito di punti d'infinito di $f(x)$ fra a e b fu data da Dirichlet; nè il suo lavoro portava che egli dovesse occuparsi del caso di un numero infinito di punti d' infinito, poichè egli considerava soltanto le funzioni che in un intervallo dato fanno un numero finito di oscillazioni, e in queste evidentemente il numero dei punti d' infinito non può ess re che finito. Nel caso di Dirichlet poi non vi era bisogno di porre la condizione che $f(x)$ restasse atta alla integrazione anche riducendola ai suoi valori assoluti, poichè, come è noto, questa condizione porta una restrizione soltanto rispetto ai valori che la funzione prende negli intorni dei punti d' infinito (m. l. §. 225) ed è sempre verificata nel caso di Dirichlet, perchè la funzione $f(x)$, avendo un numero finito di oscillazioni, negli intorni di quei punti finisce per avere sempre lo stesso segno, o tutt' al più il cangiamento di segno avviene passando dall' intorno a destra a quello a sinistra.

Pel caso poi delle funzioni $\varphi(x, h)$ generali la proprietà dimostrata nella prima parte del paragrafo precedente fu data la prima volta dal Du Bois-Reymond per un numero finito di punti d' infinito di $f(x)$, e accennata da lui anche pel caso di un numero infinito di punti d' infinito di $f(x)$.

IV. Applicazione dei risultati precedenti agli sviluppi in serie di Fourier.

43. I risultati generali che abbiamo ottenuto conducono a molte serie e a molti integrali atti a rappresentare analiticamente funzioni di una variabile reale date arbitrariamente in certi intervalli, come mostreremo diffusamente nel capitolo seguente. Ora troviamo utile di incominciare coll' applicare i risultati medesimi al caso particolare di $\varphi(x, h)=\frac{\operatorname{sen} h x}{\operatorname{sen} x}$, mostrando così intanto come essi conducano a trovare i casi più notevoli nei quali la serie di Fourier:

$$(1) \qquad \frac{1}{2}a_0+\sum_1^{\infty}(a_n \cos n x+b_n \operatorname{sen} n x),$$

ove:

$$(2) \qquad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos n x\, d x., \quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} n x\, d x,$$

può servire a darci il valore della funzione $f(x)$ o il valore medio $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

Ricordiamo perciò che, come già trovammo, la somma A_n dei primi $n+1$ termini di questa serie pel valore α di x è:

$$A_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}(x-\alpha)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(x-\alpha)} dx,$$

e quindi ponendo $x-\alpha=2y$, e $2n+1=h$, si ha;

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi+\alpha}{2}}^{0} f(\alpha+2y)\frac{\operatorname{sen} h y}{\operatorname{sen} y} d y+\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi-\alpha}{2}} f(\alpha+2y)\frac{\operatorname{sen} h y}{\operatorname{sen} y} d y,$$

o anche cambiando y in $-y$ nel primo integrale:

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi+\alpha}{2}} f(\alpha-2y)\frac{\operatorname{sen} hy}{\operatorname{sen} y}\,dy + \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi-\alpha}{2}} f(\alpha+2y)\frac{\operatorname{sen} hy}{\operatorname{sen} y}\,dy;$$

e nel caso particolare in cui sia $\alpha=\pi$ o $\alpha=-\pi$, uno dei due integrali che quì compariscono verrà a mancare e l'altro si ridurrà fra 0 e π.

Ora ammettendo per es. che α sia nullo o positivo, ma inferiore a π, e indicando con η un numero piccolissimo inferiore a $\frac{\pi-\alpha}{2}$, si potrà scrivere evidentemente:

$$A_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\eta}+\int_{\eta}^{\frac{\pi+\alpha}{2}}\right) f(\alpha-2y)\frac{\operatorname{sen} hy}{\operatorname{sen} y}\,dy +$$

$$+\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\eta}+\int_{\eta}^{\frac{\pi-\alpha}{2}}\right) f(\alpha+2y)\frac{\operatorname{sen} hy}{\operatorname{sen} y}\,dy,$$

o anche:

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\eta}\{f(\alpha-2y)+f(\alpha+2y)\}\frac{\operatorname{sen} hy}{\operatorname{sen} y}\,dy + \int_{\eta}^{\frac{\pi}{2}} f(\alpha-2y)\frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} y}\,dy +$$

$$+\int_{\eta}^{\frac{\pi-\alpha}{2}} f(\alpha+2y)\frac{\operatorname{sen} hy}{\operatorname{sen} y}\,dy + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi+\alpha}{2}} f(\alpha-2y)\frac{\operatorname{sen} hy}{\operatorname{sen} y}\,dy,$$

e quindi per trovare il limite di A_n per $n=\infty$ o per $h=\infty$, basterà esaminare i varii integrali che compariscono nel secondo membro di questa formola.

Ma ammesso, come è naturale, che la funzione $f(x)$ sia atta alla integrazione fra $-\pi$ e π, e ammesso inoltre che se

diviene infinita in un gruppo finito o infinito di punti di prima specie in questo intervallo essa resti atta alla integrazione anche riducendola ai suoi valori assoluti, basta applicare la seconda delle formole (12) del capitolo precedente per concludere subito che il secondo e terzo degli integrali che quì compariscono hanno per limite zero per $h=\infty$.

Il quarto integrale poi mancherà evidentemente se $\alpha=0$; e se $\alpha>0$ col cambiarvi y in $\pi-y$, e coll'osservare che h è un numero dispari si ridurrà all'altro $\int_{\frac{\pi-\alpha}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\alpha-2\pi+2y)\frac{\operatorname{sen} hy}{\operatorname{sen} y}dy$ che per $h=\infty$ ha pure per limite zero; quindi tutto si riduce ora a esaminare l'integrale $\int_0^{\eta}\{f(\alpha+2y)+f(\alpha-2y)\}\frac{\operatorname{sen} hy}{\operatorname{sen} y}dy$ nel quale figurano soltanto i valori di $f(x)$ nei punti di un intorno piccolissimo $(\alpha-2\eta, \alpha+2\eta)$ del punto α che si considera; talchè, osservando ora che un ugual risultato si trova quando α è negativo o nullo e differisce da $-\pi$, noi possiamo affermare intanto che quando $f(x)$ è atta alla integrazione fra $-\pi$ e π, e se diviene infinita in un gruppo finito o infinito di punti di prima specie in questo intervallo resta atta alla integrazione anche riducendola ai valori assoluti, la somma della serie (1) pel valore α di x compreso fra $-\pi$ e π (gli estremi ora al più escl.) dipende soltanto dal modo di comportarsi di $f(x)$ in un intorno comunque piccolo a destra e a sinistra del punto α, ed è il limite per $h=\infty$ dell' integrale:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\eta}\{f(\alpha+2y)+f(\alpha-2y)\}\frac{\operatorname{sen} hy}{\operatorname{sen} y}dy,$$

quando questo limite esiste.

Se poi $\alpha=\pi$, allora avendosi:

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(\pi-2y)\frac{\operatorname{sen} hy}{\operatorname{sen} y}dy=\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)f(\pi-2y)\frac{\operatorname{sen} hy}{\operatorname{sen} y}dy,$$

ovvero cambiando y in $\pi-y$ nel secondo integrale, ec.

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\eta} \{f(\pi-2y)+f(-\pi+2y)\} \frac{\operatorname{sen} h y}{\operatorname{sen} y} dy +$$

$$+\int_{\eta}^{\frac{\pi}{2}} \{f(\pi-2y)+f(-\pi+2y)\} \, dy ,$$

si vede che la somma della serie sarà il limite per $h=\infty$ dell' integrale

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\eta} \{f(\pi-2y)+f(-\pi+2y)\} \frac{\operatorname{sen} h y}{\operatorname{sen} y} \, dy .$$

e lo stesso accadrà anche per $\alpha=-\pi$, talchè pei punti estremi $\pm\pi$ la somma della serie viene a dipendere soltanto dal modo di comportarsi della funzione $f(x)$ negli intorni di ambedue questi punti nello stesso tempo, e anche se vuolsi nell' intorno di quello soltanto che si considera di questi punti, quando s'intenda che la funzione $f(x)$ sia continuata in alcuni intorni a sinistra di $-\pi$ e a destra di π con una funzione che riprende gli stessi valori della funzione data $f(x)$ in punti distanti da x di multipli di 2π, per modo cioè che la funzione stessa risulti periodica e col periodo 2π.

In ogni caso adunque la convergenza, divergenza o indeterminazione della serie di Fourier pel valore α di x viene a dipendere dal modo di comportarsi dell'integrale

$\frac{1}{\pi}\int_0^{\eta} \{f(\alpha+2y)+f(\alpha-2y)\} \frac{\operatorname{sen} h y}{\operatorname{sen} y} \, dy$, ove η è un numero fisso ma piccolo ad arbitrio, quando s' intenda, onde comprendere i punti estremi $\alpha=\pm\pi$, che la funzione sia continuata in piccoli intorni anche al disopra di π e al disotto di $-\pi$ con una funzione periodica con quella data e avente per periodo 2π; e propriamente se questo integrale ha un limite determinato e finito per $h=\infty$ la serie di Fourier pel valore α di x è con-

vergente e ha per somma questo limite; mentre se lo stesso integrale è indeterminato o è infinito la serie stessa è pure indeterminata o è infinita. — E poichè questo integrale, essendo della forma precisa dell' altro $\int_0^b f(x)\frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x}dx$, è caso particolare di quello $\int_0^b f(x)\varphi(x,h)\,dx$ che noi abbiamo studiato nei paragrafi precedenti, basterà ricordare i risultati ottenuti per quest' ultimo integrale onde avere subito dei casi in cui la serie di Fourier considerata per un valore qualunque α di x fra $-\pi$ e π ($-\pi$ e π incl.) è convergente e di essa si conosce la somma.

44. E difatti, intendendo sempre nei teoremi che ora enuncieremo che la nostra funzione $f(x)$ sia atta alla integrazione fra $-\pi$ e π, e se è infinita si mantenga atta alla integrazione anche riducendola ai suoi valori assoluti; e intendendo inoltre (onde comprendere nei nostri enunciati il caso in cui α sia uguale a $\pm\pi$) che questa funzione $f(x)$ sia continuata in piccoli intorni anche al disopra di π e al disotto di $-\pi$ con una funzione periodica con quella data e avente per periodo 2π, basterà applicare alcuni dei più semplici fra i risultati generali ottenuti nel capitolo precedente agli integrali

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\eta f(\alpha-2y)\frac{\operatorname{sen} hy}{\operatorname{sen} y}dy\ ,\ \frac{1}{\pi}\int_0^\eta f(\alpha+2y)\frac{\operatorname{sen} hy}{\operatorname{sen} y}dy$$ considerati separatamente, o all'altro $\frac{1}{\pi}\int_0^\eta \{f(\alpha-2y)+f(\alpha+2y)\}\frac{\operatorname{sen} hy}{\operatorname{sen} y}dy$, per giungere subito ad enunciare i teoremi seguenti:

I. „ Se in un piccolo intorno $(\alpha-\eta, \alpha+\eta)$ del punto α „ la funzione $f(x)$ è sempre finita e non fà un numero infinito „ di oscillazioni, la serie di Fourier (1) per $x=\alpha$ è convergente „ e ha per somma $\frac{f(\alpha+0)+f(\alpha-0)}{2}$, per modo che se nel punto α „ $f(x)$ è continua la somma della serie stessa sarà precisamente

„ il valore $f(x)$ della funzione. S' intende che in questo caso
„ $f(\alpha+0)$ e $f(\alpha-0$ hanno certamente un significato „.

E „ se, qualunque sia il modo di comportarsi di $f(x)$ negli
„ intorni del punto α, la funzione $F(t)=f(\alpha+t)+f(\alpha-t)$ per t
„ compreso fra 0 e η è finita e non fà un numero infinito di
„ oscillazioni, allora la serie di Fourier per $x=\alpha$ sarà ancora
„ convergente, e la sua somma sarà $\lim\limits_{t=0}\frac{f(\alpha+t)+f(\alpha-t)}{2}$, e
„ quindi sarà ancora $\frac{f(\alpha+0)+f(\alpha-0)}{2}$ tutte le volte che
„ $f(\alpha+0)$ e $f(\alpha-0)$ hanno un valore determinato e finito „.

„ Lo stesso poi accadrà se $f(x)$ sarà continua nei punti
„ di intorni a destra o a sinistra di α, e farà un numero infi-
„ nito di oscillazioni in uno o in tutti e due questi intorni
„ (infiniti massimi e minimi), purchè però i massimi e minimi
„ vengano a sparire in $f(x)$ o in $F(t)$ coll' aggiungervi una
„ conveniente funzione di primo grado, ec. „.

II. „ Se nell'intorno del punto α la funzione $f(x)$ è finita e in α
„ ha tutt' al più una discontinuità di prima specie, ma conside-
„ rando separatamente gli intorni a destra e quelli a sinistra di α
„ e intendendo ogni volta ristabilita la continuità nel punto α,
„ si trova che in questo punto i rapporti incrementali destri
„ $\frac{f(\alpha+t)-f(\alpha+0)}{t}$ e così quelli sinistri $\frac{f(\alpha-t)-f(\alpha-0)}{-t}$
„ sono sempre inferiori a un numero finito, o almeno se cre-
„ scendo indefinitamente restano atti alla integrazione rispetto
„ a t anche ridotti ai loro valori assoluti, allora la serie di
„ Fourier per $x=\alpha$ sarà convergente e avrà per somma
„ $\frac{f(\alpha+0)+f(\alpha-0)}{2}$ „.

Più generalmente „ se per $t=0$ la funzione $F(t)=f(\alpha+t)+$
„ $+f(\alpha-t)$ sarà continua o avrà tutt'al più una discontinuità
„ di prima specie, per modo che il limite di $f(\alpha+t)+f(\alpha-t)$
„ per $t=0$ sia determinato e finito, la serie di Fourier per $x=\alpha$
„ sarà convergente e avrà per somma $\lim\limits_{t=0}\frac{f(\alpha+t)+f(\alpha-t)}{2}$

„ quando il rapporto incrementale destro di $f(\alpha+t)+f(\alpha-t)$,
„ cioè $\frac{f(\alpha+t)-\lim[f(\alpha+t)+f(\alpha-t)]+f(\alpha-t)}{t}$ sia sempre in-
„ feriore a un numero finito, o almeno resti atto all'integra-
„ zione anche ridotto ai suoi valori assoluti „.

E così in particolare „ se $f(x)$ sarà finita e continua nel
„ punto α, la serie di Fourier per $x=\alpha$ sarà convergente e avrà
„ per somma $f(x)$ quando il rapporto $\frac{f(\alpha+t)-2f(\alpha)+f(\alpha-t)}{t}$
„ non cresce indefinitamente col diminuire indefinitamente di
„ t, o almeno resta atto alla integrazione anche ridotto ai va-
„ lori assoluti „.

Nè può lasciarsi di osservare che questo rapporto non è altro che la differenza dei rapporti incrementali destri e sinistri $\frac{f(\alpha+t)-f(\alpha)}{t}$, $\frac{f(\alpha-t)-f(\alpha)}{-t}$ di $f(x)$ nel punto α per valori uguali di t; e in conseguenza del teorema ora enunciato si può anche dire in particolare che „ se gli estremi oscillatorii dei rap-
„ porti incrementali destri e sinistri di $f(x)$ presi nel punto α,
„ o almeno quelli destri di $f(\alpha+t)+f(\alpha-t)$ presi nel punto
„ $t=0$, saranno finiti, allora la serie di Fourier corrisponden-
„ te per $x=\alpha$ sarà convergente, e avrà per somma
„ $\lim_{t=0}\frac{f(\alpha+t)+f(\alpha-t)}{2}$.

III. „ Se la funzione $f(x)$ in un intorno $(\alpha-\eta, \alpha+\eta)$ del
„ punto α è sempre finita, ed è continua per tutto, tranne
„ tutt'al più nel punto α ove può avere una discontinuità ordi-
„ naria, e se indicando con σ un numero positivo arbitrariamente
„ piccolo e con D_δ le oscillazioni che essa fà in ogni inter-
„ vallo δ preso in questo intorno cui non appartenga il punto
„ α si ha $D_\delta \log \delta < \sigma$, la serie di Fourier per $x=\alpha$ sarà
„ convergente e avrà per somma $\frac{f(\alpha+0)+f(\alpha-0)}{2}$.

„ Un ugual risultato si ha pel caso in cui queste condi-
„ zioni anzichè per la funzione $f(x)$ sono soddisfatte per la

„ funzione $F(t) = f(\alpha+t)+f(\alpha-t)$ in un intorno $(0, \eta)$ a destra
„ del punto $t=0$.

IV. „ Se la funzione $f(x)$ in un intorno $(\alpha-\eta, \alpha+\eta)$ del
„ punto α è sempre finita ed è continua per tutto tranne
„ tutt' al più nel punto α stesso ove può avere una disconti-
„ nuità ordinaria, e se il prodotto di $x-\alpha$ per le sue derivate
„ o per gli estremi oscillatorii dei suoi rapporti incrementali
„ considerati nei punti dello stesso intorno fuori di α ha per
„ limite zero per $x=\alpha$, la serie di Fourier per $x=\alpha$ sarà
„ convergente e avrà per somma $\frac{f(\alpha+0)+f(\alpha-0)}{2}$ „.

„ Ugual risultato si ha pel caso più generale in cui questa
„ condizione è soddisfatta per la solita funzione $F(t)=f(\alpha+t)+$
„ $+f(\alpha+t)$ nell'intorno a destra del punto $t=0$, e così in parti-
„ colare si può dire che, se nei punti diversi da α dell'intorno
„ $(\alpha-\eta, \alpha+\eta)$ di α la funzione $f(x)$ ha una derivata determinata
„ e finita, e l' altra $f(\alpha+t)+f(\alpha-t)$ per $t=0$ ha un limite
„ determinato anch' esso e finito, basterà che il prodotto
„ $t[f'(\alpha+t)-f'(\alpha-t)]$ abbia per limite zero per $t=0$ per
„ potere assicurare che la serie di Fourier è convergente per
„ $x=\alpha$ e ha per somma $\lim_{t=0}\frac{f(\alpha+t)+\alpha' f-t)}{2}$ „.

Invece poi di queste condizioni basterebbe anche che fos-
sero soddisfatte le altre che „ essendo $f(\alpha+t)=f(\alpha+0)+\rho(t)\omega(t)$,
„ e $f(\alpha-t)=f(\alpha-0)+\rho_1(t)\,\omega_1(t)$, o $F(t)=\lim[f(\alpha+t)+$
„ $+f(\alpha-t)]+\rho_2(t)\,\omega_2(t)$, le funzioni $\rho(t)$ e $\rho_1(t)$, o l'altra $\rho_2(t)$
„ nell'intorno del punto $t=0$ a destra non facessero oscillazio-
„ ni, e le funzioni $\omega(t)$ e $\omega_1(t)$, o l' altra $\omega_2(t)$ fossero sempre
„ finite e tali che i prodotti $\rho(t)\,t\,\lambda_{\omega}$, e $\rho_1(t)\,t\,\lambda_{\omega_1}$ o l' altro
„ $\rho_2(t)\,t\,\lambda_{\omega_2}$ avessero per limite zero per $t=+0$, essendo
„ λ_{ω}, λ_{ω_1} e λ_{ω_2} estremi oscillatorii relativi a ω, ω_1, ω_2 „.

V. Similmente „ se $f(x)$ avrà una derivata determinata e
„ finita fuori del punto α, e $f(a+t)+f(a-t)$ per $t=0$ avrà
„ un limite pure determinato e finito L, ma i limiti di $t\,f'(a+t)$

„ e $t\,f'(a-t)$ o quello di $t[f'(a+t)-f'(a-t)]$ non saranno lo
„ zero, allora perchè la serie di Fourier sia ancora convergente
„ per $x=\alpha$ e abbia per somma L basterà che fra 0 e η $(\eta>0)$
„ ciascuna delle funzioni $f'(\alpha+t)$ e $f'(\alpha-t)$ o la loro differenza
„ $f'(\alpha+t)-f'(\alpha-t)$ si scomponga nel prodotto $\mu(t)\,\nu(t)$ di
„ due funzioni l' una delle quali $\mu(t)$ tende a zero con t e
„ l' altra $\nu(t)$ cresce indefinitamente senza oscillare, e ha una
„ derivata o un estremo oscillatorio atto alla integrazione
„ fra η_1 e η $(0<\eta_1<\eta)$, mentre $t\,\nu(t)$ al tendere a zero di t
„ non và decrescendo, e i due prodotti $[f(\alpha+t)-f(\alpha+0)]\nu(t)$,
„ $[f(\alpha-t)-f(\alpha-0)]\,\nu(t)$ o l'unico $[f(\alpha+t)+f(\alpha-t)-\mathrm{L}]\nu(t)$
„ sono atti all' integrazione fra 0 e η „.

E anche quì più in generale può dirsi che „ se, essendo
„ ancora come nei casi precedenti $f(\alpha+t)=f(\alpha+0)+\rho(t)\,\omega(t)$,
„ e $f(\alpha-t)=f(\alpha-0)+\rho_1(t)\,\omega_1(t)$ o $\mathrm{F}(t)=\lim_{t=0}\{f(\alpha+t)+$
„ $+f(\alpha-t)\}+\rho_2(t)\,\omega_2(t)$, non saremo nel caso IV, ma però
„ per es. per la $\rho_2(t)\,\omega_2(t)$, $\omega_2(t)$ sarà tale che λ_{ω_2} si scom-
„ porrà nel prodotto $\mu(t)\,\nu(t)$ di due funzioni che soddisfano
„ alla condizione V. del §. 39, allora la serie di Fourier cor-
„ rispondente per $x=\alpha$ sarà ancora convergente e avrà per
„ somma $\lim_{t=0}\dfrac{f(\alpha+t)+f(\alpha-t)}{2}$.

VI. „ Se poi la funzione $f(x)$ nell' intorno $(\alpha-\eta\,,\,\alpha+\eta)$
„ del punto α avrà un estremo oscillatorio che quand'anche di-
„ venga infinito in punti fuori di α ma vicini quanto si vuole
„ ad α, è atto all' integrazione anche ridotto ai suoi valori
„ assoluti tanto negli intorni a destra che in quelli a sinistra,
„ allora per $x=\alpha$ la serie di Fourier sarà ancora convergente
„ e avrà per somma $\dfrac{f(\alpha+0)+f(\alpha-0)}{2}$ „.

„ E al solito se $f(\alpha+t)=f(\alpha+0)+\rho(t)\,\omega(t)$, $f(\alpha-t)=$
„ $=f(\alpha-0)+\rho_1(t)\,\omega_1(t)$, basterà che λ_{ω} e λ_{ω_1} siano atti all'in-
„ tegrazione fra η_1 e η $(0<\eta_1<\eta)$, e le funzioni $\rho(t)\lambda_{\omega}$, $\rho_1(t)\lambda_{\omega_1}$

„ lo siano fra 0 e η anche riducendole ai loro valori assoluti;
„ o se si avrà $F(t) = \lim \frac{f(\alpha+t) + f(\alpha-t)}{2} + \rho_2(t)\,\omega_2(t)$, basterà
„ che λ_{ω_2} sia atta alla integrazione fra η_1 e η, e $\rho_2(t)\lambda_{\omega_2}$ sia atta
„ all'integrazione fra 0 e η anche ridotta ai valori assoluti „.

VII. „ Similmente se, essendo $\varphi_1, \varphi_2, .., \varphi_n$, e $\psi_1, \psi_2, .., \psi_n$
„ funzioni che soddisfano alle condizioni del §. 38. i due
„ integrali:

$$\frac{1}{\varphi_n}\int_0^t \frac{dt}{\varphi_{n-1}}\int_0^t \frac{dt}{\varphi_{n-2}} \cdots \int_0^t \frac{dt}{\varphi_1}\int_0^t [f(\alpha+t) - f(\alpha+0)]\,dt,$$

$$\frac{1}{\psi_{n'}}\int_0^t \frac{dt}{\psi_{n'-1}}\int_0^t \frac{dt}{\psi_{n'-2}} \cdots \int_0^t \frac{dt}{\psi_1}\int_0^t [f(\alpha-t) - f(\alpha-0)]\,dt$$

„ sono tali che le loro derivate n^e o n'^e, o gli estremi oscil-
„ latorii delle loro derivate $(n-1)^e$ o $(n'-1)^e$ moltiplicati re-
„ spettivamente per $\frac{\varphi_1 \varphi_2 \cdots \varphi_n}{t}$, $\frac{\psi_1 \psi_2 \cdots \psi_{n'}}{t}$ restino atti all'in-
„ tegrazione anche ridotti ai valori assoluti, la serie di Fourier
„ sarà ancora convergente per $x=\alpha$ e avrà per somma
„ $\frac{f(\alpha+0) + f(\alpha-0)}{2}$ „.

E al solito anche questa condizione potrebbe invece enunciarsi per la funzione $F(t)$ o trasformarsi col supporre $f(\alpha+t) = f(\alpha+0) + \rho(t)\,\omega(t)$, $f(\alpha-t) = f(\alpha-0) + \rho_1(t)\,\omega_1(t)$, ec., come anche si potrebbe via via supporre che la funzione $f(x)$ a destra di α verificasse una delle condizioni quì enunciate, e a sinistra ne verificasse un altra, ec.

Queste condizioni, anche considerate soltanto a destra o soltanto a sinistra del punto α, saranno dette condizioni I, II, . . . , VII respettivamente.

45. Questi risultati che noi abbiamo dati soltanto pel punto $x=\alpha$ si applicano naturalmente all' intiero intervallo $(-\pi, \pi)$ in cui è data la funzione $f(x)$, quando in ogni punto

di questo intervallo siano soddisfatte una o più delle condizioni che nel paragrafo precedente abbiamo date come sufficienti pel punto α stesso.

Così per es. in forza della condizione I. si può dire che „ la serie di Fourier (1) ove i coefficienti a_n e b_n hanno i „ valori (2), rappresenta la funzione data $f(x)$ in ogni punto x „ fra $-\pi$ e π, dandoci però per suo valore nei punti α di discon- „ tinuità il valor medio $\frac{f(\alpha+0)+f(\alpha-0)}{2}$ e nei punti estremi „ $\pm\pi$ il valore medio $\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$, tutte le volte che „ questa funzione $f(x)$ fra $-\pi$ e π è sempre finita e fà soltanto „ un numero finito di oscillazioni „, per modo che in questo caso (che è quello considerato da *Dirichlet*) se $f(x)$ è anche sempre continua, la somma della serie è $f(x)$ in ogni punto x *interno* all' intervallo $(-\pi, \pi)$, e nei punti estremi $\pm\pi$ è il valore medio $\frac{f(\pi)+f(-\pi)}{2}$ fra i valori estremi.

Lo stesso accade pei punti x fra $-\pi$ e π pei quali $f(x)$ è finita e soddisfa ad una qualsiasi delle altre condizioni II, III . . . del paragrafo precedente, supposto al solito che se $f(x)$ diviene infinita fra $-\pi$ e π in un gruppo finito o infinito di punti di prima specie essa resti atta alla integrazione anche ridotta ai suoi valori assoluti; ma fuori di questi casi, a meno che circostanze speciali non ci permettano di dire che lo sviluppo di Fourier continua ancora a valere, non si potrà assicurar nulla; e anzi, come già notammo al §. 7, si conoscono effettivamente anche delle funzioni che sebbene sempre finite e continue fra $-\pi$ e π, almeno in dati punti non sono sviluppabili in serie di Fourier.

Però s'intende bene che lo sviluppo di Fourier viene applicabile a classi estesissime di funzioni fra le quali figurano tutte quelle che, almeno nello stato attuale della scienza, occorre di considerare nelle applicazioni dell' analisi allo studio dei fenomeni naturali; e oltre a ciò è degno di nota che, quando $f(x)$ è sempre finita e contiuua in una certa porzione (a, b) dell'in-

tervallo $(-\pi, \pi)$, appoggiandosi sulla condizione II del paragrafo precedente, e facendo astrazione dal caso singolarissimo in cui gli estremi oscillatorii dei rapporti incrementali della funzione $f(x)$ fossero sempre $+\infty$ o $-\infty$ in ogni punto della stessa porzione (a, b) almeno da una parte, si può affermare che in questa porzione vi saranno sempre dei punti nei quali la serie di Fourier è convergente e ha per somma la funzione stessa $f(x)$; poichè potrà esservi incertezza pei punti nei quali uno almeno di questi estremi oscillatorii (destri o sinistri) è infinito, ma negli altri punti la serie stessa sarà sempre convergente e avrà per somma $f(x)$.

46. Ciò premesso, noi possiamo dunque affermare che se $f(x)$ è una funzione che fra $-\pi$ e π è atta alla integrazione ed è sempre finita, o se diviene infinita in un gruppo finito o infinito di punti di prima specie, resta atta alla integrazione anche riducendola ai suoi valori assoluti, la formola di Fourier:

$$(3) \qquad f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_1^\infty (a_n \cos n x + b_n \operatorname{sen} n x),$$

ove:

$$(4) \qquad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x \, d x, \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} n x \, d x,$$

sussisterà per tutti i punti x fra $-\pi$ e π ($-\pi$ e π inclus.) pei quali sono soddisfatte le condizioni dei paragrafi precedenti, salvo però a intendere sempre che in quelli fra questi punti x pei quali $f(x)$ è discon inua, pel valore di $f(x)$ che figura al primo membro deve prendersi $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, o il limite per $t=0$ di $\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}$; e pei punti estremi $\pm\pi$ (quando questi punti siano fra quelli da considerarsi), il primo membro deve intendersi che sia $\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$ o $\lim_{t=0} \frac{f(-\pi+t)+f(\pi-t)}{2}$.

Ed è degno di nota che „ quando siano soddisfatte le con-
„ dizioni d'integrabilità di $f(x)$ che ora abbiamo indicate, la
„ validità della formola (3) per ogni punto speciale x fra $-\pi$
„ e π ($\pm\pi$ incl.), non dipenderà affatto dal modo di compor-
„ tarsi di $f(x)$ nei singoli punti fuori di x, ma soltanto dal
„ modo di comportarsi di $f(x)$ negli intorni di quel punto x „.

47. Aggiungeremo che, a causa della forma dei coefficienti a_n e b_n, si vede subito che quando la funzione data $f(x)$ per valori eguali e di segno contrario di x ha lo stesso valore, la serie di Fourier si riduce a una serie di coseni, cioè si ha:

$$(5) \qquad f(x)=\tfrac{1}{2}\,a_0+a_1\cos x+a_2\cos 2\,x+\ldots+a_n\cos n\,x+\ldots,$$

ove:

$$(6) \qquad a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos n\,x\,d\,x,$$

e questa formola vale per tutti i valori di x fra $-\pi$ e π ($-\pi$ e π incl.) pei quali sono soddisfatte le solite condizioni dei paragrafi precedenti, e colle avvertenze fatte sopra rispetto ai punti di discontinuità, e ai punti estremi $\pm\pi$, negli ultimi dei quali (quando ad essi la formola è applicabile) si ha per somma della serie il valore $f(\pi-0)$ o $f(-\pi+0)$.

Se poi la funzione data $f(x)$ per valori eguali e di segno contrario di x prende valori uguali e di segno contrario, la serie di Fourier si riduce a una serie di seni, e si ha:

$$(7) \qquad f(x)=b_1\,\mathrm{sen}\,x+b_2\,\mathrm{sen}\,2\,x+\ldots+b_n\,\mathrm{sen}\,n\,x+\ldots,$$

con:

$$(8) \qquad b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{sen}\,n\,x\,d\,x,$$

per tutti i valori di x che soddisfano alle solite condizioni fra $-\pi$ e π ($-\pi$ e π incl.), e colle solite avvertenze rispetto ai punti di discontinuità e ai punti estremi, negli ultimi dei quali

come nel punto $x=0$ la somma della serie viene sempre uguale allo zero.

48. Si consideri ora una funzione fra 0 e π che sia atta alla integrazione e sia sempre finita, o se diviene infinita in un gruppo di punti di prima specie resti atta alla integrazione anche ridotta ai suoi valori assoluti, e si immagini continuata anche fra 0 e $-\pi$ con una funzione *qualunque* dotata delle stesse proprietà, e con una funzione che pel valore negativo $-x$ sia uguale, o uguale e di segno contrario al valore della funzione data nel punto x, per modo da formare in questi ultimi casi una funzione fra $-\pi$ e π per la quale si abbia $f(-x)=f(x)$, o $f(-x)=-f(x)$. Allora si avranno tre funzioni fra $-\pi$ e π che nell'intervallo da 0 a π saranno uguali per tutto, e differiranno l'una dall'altra soltanto fra $-\pi$ e 0; e queste funzioni considerate pei valori di x fra 0 e π (0 e π esclus.) soddisfaranno o nò contemporaneamente alle condizioni che si richiedono per essere sviluppabili colle formole (3), (5) e (7), perchè queste condizioni si riferiscono soltanto ai valori della funzione negli intorni dei punti corrispondenti. Ne segue che pei valori di x fra 0 e π (gli estremi 0 e π esclusi) pei quali la funzione data soddisfa a una delle condizioni del §. 44, essa avrà ad un tempo le tre espressioni analitiche distinte (3), (5) e (7): quindi evidentemente può dirsi che una stessa funzione pei valori di x fra 0 e π (0 e π al più escl.) pei quali è sviluppabile in serie di Fourier può rappresentarsi ad un tempo per una serie di seni soltanto, o per una serie di coseni soltanto, o per una serie di seni e coseni; e evidentemente queste varie espressioni della stessa funzione per tutti o per alcuni valori di x fra 0 e π (0 e π escl.), potranno anche servire a stabilire delle relazioni generali per gli stessi valori di x nelle quali figurerà una funzione data arbitrariamente fra 0 e π, o fra 0 e $-\pi$.

49. Aggiungiamo che se la funzione $f(x)$ invece di essere data fra $-\pi$ e π, è data fra due numeri qualunque a e b fra i quali è sempre finita o diviene infinita in un gruppo qualunque di punti di prima specie, ma in modo allora che essa resti atta alla integrazione anche riducendola ai valori assoluti,

la serie di Fourier ci conduce subito a una espressione analitica che vale per tutti quei valori di x fra a e b pei quali sono soddisfatte le condizioni dei casi precedenti, e colle solite avvertenze rispetto a quelli fra questi punti che sono di discontinuità e rispetto ai punti estremi a e b.

Osserviamo infatti che se si cangia la variabile x nella variabile y con una equazione della forma $y=\alpha x+\beta$, ove α e β sono costanti, basterà prendere $\alpha=\frac{2\pi}{b-a}$, $\beta=-\frac{\pi(a+b)}{a-b}$ per far sì che la funzione $f(x)$, considerata come una funzione $\varphi(y)=f\left(\frac{(y-\beta)}{\alpha}\right)$ di y, possa riguardarsi come data per tutti i valori di y da $-\pi$ a π; e allora questa funzione $\varphi(y)$, pei valori di y o di x che soddisfano alle solite condizioni, e colle solite avvertenze rispetto ai punti di discontinuità e ai punti estremi, si svilupperà secondo la formola:

$$\varphi(y)=\frac{1}{2}a_0+\sum_1^\infty (a_n\cos ny+b_n\,\text{sen}\,ny),$$

con:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(y)\cos ny\,dy, \qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(y)\,\text{sen}\,ny\,dy;$$

talchè introducendo nuovamente la variabile x colla formola di trasformazione precedente, si troverà subito per x compreso fra a e b:

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_1^\infty\left(a_n\cos\frac{n\pi(2x-b-a)}{b-a}+b_n\,\text{sen}\frac{n\pi(2x-b-a)}{b-a}\right),$$

con:

$$a_n=\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\frac{n\pi(2x-b-a)}{b-a}dx,\ b_n=\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\,\text{sen}\frac{n\pi(2x-b-a}{b-n}$$

ovvero:

$$(9)\qquad f(x)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(\alpha)\,dx+\frac{2}{b-a}\sum_1^\infty\int_a^b f(\alpha)\cos\frac{2n\pi(x-\alpha)}{b-a}\,d\alpha,$$

o anche infine:

$$(10)\qquad f(x)=\frac{1}{b-a}\sum_1^\infty\left\{\cos\frac{2n\pi x}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\frac{2n\pi\alpha}{b-a}\,da+\right.$$
$$\left.+\operatorname{sen}\frac{2n\pi x}{b-a}\int_a^b f(\alpha)\operatorname{sen}\frac{2n\pi\alpha}{b-a}\,d\alpha\right\},$$

colle solite condizioni rispetto ai valori di x pei quali si vuole esser certi che questa formola sussiste, e colle solite avvertenze rispetto ai punti di discontinuità e ai punti estremi a e b.

50. Supponendo ora in particolare nelle (9) e (10) $a=0$, si ottengono le formole seguenti:

$$(11)\quad\begin{cases} f(x)=\frac{1}{b}\int_0^b f(\alpha)\,d\alpha+\frac{2}{b}\sum_1^\infty\int_0^b f(\alpha)\cos\frac{2n\pi(x-\alpha)}{b}\,d\alpha,\\ f(x)=\frac{1}{b}\int_0^b f(\alpha)\,d\alpha+\frac{2}{b}\sum_1^\infty\left\{\cos\frac{2n\pi x}{b}\int_0^b f(\alpha)\cos\frac{2n\pi\alpha}{b}\,d\alpha+\right.\\ \qquad\left.+\operatorname{sen}\frac{2n\pi x}{b}\int_0^b f(\alpha)\operatorname{sen}\frac{2n\pi\alpha}{b}\,d\alpha\right\}, \end{cases}$$

che valgono pel caso che la funzione $f(x)$ sia data arbitrariamente fra 0 e b; e supponendo invece nelle (9) e (10) stesse $a=-b$, si ottengono le altre:

$$(12)\quad\begin{cases} f(x)=\frac{1}{2b}\int_{-b}^b f(\alpha)\,d\alpha+\frac{1}{b}\sum_1^\infty\int_{-b}^b f(\alpha)\cos\frac{n\pi(x-\alpha)}{b}\,d\alpha,\\ f(x)=\frac{1}{2b}\int_{-b}^b f(\alpha)\,d\alpha+\frac{1}{b}\sum_1^\infty\left\{\cos\frac{n\pi x}{b}\int_{-b}^b f(\alpha)\cos\frac{n\pi\alpha}{b}\,d\alpha+\right.\\ \qquad\left.+\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{b}\int_{-b}^b f(\alpha)\operatorname{sen}\frac{n\pi\alpha}{b}\,d\alpha\right\}, \end{cases}$$

che valgono pel caso delle funzioni date arbitrariamente fra $-b$ e b.

Supponendo inoltre in quest' ultima formola $f(-\alpha)=f(\alpha)$, o $f(-\alpha)=-f(\alpha)$, si ottengono anche le seguenti:

$$(13)\quad f(x)=\frac{1}{b}\int_0^b f(\alpha)\,d\alpha+\frac{2}{b}\sum_1^\infty \cos\frac{n\pi x}{b}\int_0^b f(\alpha)\cos\frac{n\pi\alpha}{b}\,d\alpha\,,$$

$$(14)\qquad f(x)=\frac{2}{b}\sum_1^\infty \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{b}\int_0^b f(\alpha)\operatorname{sen}\frac{n\pi\alpha}{b}\,d\alpha\,,$$

e queste danno come le (11) e pei soliti valori di x la espressione analitica di una funzione $f(x)$ data arbitrariamente fra 0 e b, colla differenza però che mentre le (11) per $x=0$ e $x=b$ (quando siano applicabili anche a questi valori di x) danno per valore di $f(x)$ il limite per $t=0$ di $\frac{f(t)+f(b-t)}{2}$, la (13) per $x=0$ dà per valore di $f(x)$ il limite $\lim\frac{f(t)+f(-t)}{2}=\lim f(t)=\lim f(-t)$, e per $x=b$ dà $\lim\frac{f(b-t)+f(-b+t)}{2}=\lim f(b-t)==\lim f(-b+t)$, mentre la (14) per $x=0$ e $x=b$ dà per valore di $f(x)$ lo zero.

51. Nell' ipotesi dunque che la funzione data $f(x)$ fra 0 e b sia la stessa in tutte le formole (11), (12), (13) e (14), e anche nelle (9) e (10) quando $a<0$ e il b di queste ultime è superiore o uguale a quello delle altre, si hanno così varie espressioni analitiche di questa funzione per tutti quei valori di x fra 0 e b (gli estremi 0 e b però ordinariamente escl.) pei quali sono soddisfatte le solite condizioni dei paragrafi precedenti; e questa particolarità, che già si presentò per le serie (7) e (8) nel caso dell' intervallo $(0,\pi)$, permette anche di stabilire delle relazioni generali per qualunque funzione $f(x)$ quando x sia compreso fra 0 e b, e siano soddisfatte le solite condizioni.

È però da notare che fuori dell' intervallo $(0,b)$ nella

parte che resta dell'intervallo originariamente considerato (a, b), o $(-b, b)$, le varie serie (che pure fra 0 e b pei soliti valori di x hanno tutte la stessa somma e servono a rappresentare la stessa funzione) vengono ordinariamente ad avere somme differentissime; nè potrebbe essere altrimenti, poichè, come vedremo in seguito, ove questo non fosse, le serie considerate anzichè essere distinte sarebbero perfettamente le stesse.

52. Diamo ora alcune applicazioni dei risultati che abbiamo ottenuti.

1.° Si voglia una funzione che sia uguale ad A fra 0 e π, e sia uguale a $-$A fra 0 e $-\pi$, e per $x=0$ sia uguale ad A o ad un altro valore qualunque.

In questo caso la funzione essendo data fra $-\pi$ e π, la serie corrispondente sarà un caso particolare della vera serie di Fourier (1). Essa conterrà però soltanto i seni, per modo che si ridurrà alla forma $\sum_{1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n x$, ove $b_n = \frac{2\text{A}}{\pi}\int_0^\pi \operatorname{sen} n x\, dx$; e quindi sarà la seguente:

$$\frac{4\text{A}}{\pi}\sum_{0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2n+1)x}{2n+1};$$

talchè osservando che per x compreso fra 0 e π la somma di questa serie è A, e per x fra 0 e $-\pi$ è $-$A, si avranno le formole seguenti:

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{\pi}{4}=\displaystyle\sum_{1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2n+1)x}{2n+1} & \text{per } x \text{ fra } 0 \text{ e } \pi \ (0 \text{ e } \pi \text{ escl.}), \\ -\dfrac{\pi}{4}=\displaystyle\sum_{1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2n+1)x}{2n+1} & \text{per } x \text{ fra } 0 \text{ e } -\pi \ (0 \text{ e } -\pi \text{ escl.}); \end{cases}$$

e quindi facendo $x=\frac{\pi}{2}$ e $x=\frac{\pi}{4}$ nella prima di queste formole si avranno le altre:

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\dots,$$

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} - \dots$$

2.º Vogliasi una funzione che fra 0 e $\frac{b}{2}$ sia uguale ad x, e fra $\frac{b}{2}$ e b sia uguale a $-x$.

In questo caso potremo applicare una qualunque delle serie (11), (13) e (14).

Per applicare la (11) si osserva che in questo caso si ha:

$$\int_0^b f(\alpha)\cos\frac{2n\pi\alpha}{b}\,d\alpha = \int_0^{\frac{b}{2}} \alpha\cos\frac{2n\pi\alpha}{b}\,d\alpha - \int_{\frac{b}{2}}^{b} \alpha\cos\frac{2n\pi\alpha}{b}\,d\alpha =$$

$$= \int_0^{\frac{b}{2}} \alpha\cos\frac{2n\pi\alpha}{b}\,d\alpha - \int_0^{\frac{b}{2}}\left(\alpha+\frac{b}{2}\right)\cos\frac{2n\pi\left(\alpha+\frac{b}{2}\right)}{b}\,d\alpha =$$

$$= \left\{1+(-1)^{n+1}\right\}\int_0^{\frac{b}{2}} \alpha\cos\frac{2n\pi\alpha}{b}\,d\alpha = \left\{1+(-1)^{n+1}\right\}\left\{\left[\frac{b\alpha}{2n\pi}\,\text{sen}\,\frac{2n\pi\alpha}{b}\right]_0^{\frac{b}{2}} + \frac{b^2}{4n^2\pi^2}\left[\cos\frac{2n\pi\alpha}{b}\right]_0^{\frac{b}{2}}\right\} = 0 \text{ per } n \text{ pari},$$

$$= \frac{b^2}{(2m+1)^2\pi^2} \text{ per } n \text{ dispari} = 2m+1.$$

Similmente si ha:

$$\int_0^b f(\alpha)\,d\alpha = -\frac{b^2}{4}, \quad \int_0^b f(\alpha)\,\text{sen}\,\frac{2n\pi\alpha}{b}\,d\alpha = 0 \text{ per } n \text{ pari},$$

$$= \frac{b^2}{(2m+1)\pi} \text{ per } n \text{ dispari} = 2m+1,$$

e quindi infine si ha:

$$(16)\quad f(x)=-\frac{b}{4}-\frac{2b}{\pi^2}\sum_1^\infty\frac{\cos\frac{2(2m+1)\pi x}{b}}{(2m+1)^2}+\frac{2b}{\pi}\sum_0^\infty\frac{\operatorname{sen}\frac{2(2m+1)\pi x}{b}}{2m+1}.$$

per una prima espressione della attuale funzione $f(x)$.

In simil modo si troverebbe col mezzo delle (13) e (14) per la stessa funzione $f(x)$:

$$(17)\qquad f(x)=-\frac{b}{4}-\frac{2b}{\pi^2}\sum_1^\infty\frac{\cos\frac{2(2m+1)\pi x}{b}}{(2m+1)^2}+$$

$$+\frac{2b}{\pi}\sum_1^\infty(-1)^m\frac{\cos\frac{(2m+1)\pi x}{b}}{2m+1},$$

$$(18)\qquad f(x)=\frac{2b}{\pi}\sum_1^\infty\frac{\operatorname{sen}\frac{2(2m+1)\pi x}{b}}{2m+1}+$$

$$+\frac{4b}{\pi^2}\sum_0^\infty\frac{(-1)^m\operatorname{sen}\frac{(2m+1)\pi x}{b}}{(2m+1)^2}-\frac{2b}{\pi}\sum_0^\infty\frac{\operatorname{sen}\frac{(2m+1)\pi x}{b}}{2m+1};$$

e osservando che la formola (16) deve dare $-\frac{b}{2}$ pel valore di $f(x)$ per $x=0$, si ottiene la seguente:

$$(19)\qquad \frac{\pi^2}{8}=\sum_0^\infty\frac{1}{(2m+1)^2}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots,$$

che si sarebbe ottenuta anche dalla (17) osservando che per $x=0$ e $x=b$ essa deve dare respettivamente 0 e b per valori di $f(x)$, e avendo riguardo alla prima delle formole (15).

La stessa formola si trova anche coll'osservare che per $x=\frac{b}{2}$ tutte le formole precedenti devono dare 0 per valore di $f(x)$.

Confrontando poi le stesse formole fra loro si trova che

per x compreso fra 0 e b (0 e b escl.) si hanno varie relazioni fra le quali è da notarsi la seguente:

$$\sum_0^\infty \frac{\operatorname{sen}\frac{2(2m+1)\pi x}{b}}{2m+1} = \sum_0^\infty (-1)^m \frac{\cos\frac{(2m+1)\pi x}{b}}{2m+1},$$

che per $b=\pi$ (0 e π allora escl.) si riduce all'altra più semplice:

$$\sum_0^\infty \frac{\operatorname{sen} 2(2m+1)x}{2m+1} = \sum_0^\infty (-1)^m \frac{\cos(2m+1)x}{2m+1}$$

3.° Vogliasi ora una funzione che sia uguale ad x fra 0 e b.

Le serie da applicarsi in questo caso saranno ancora le (11), (13) e (14).

Per applicare la (11), si osserva che ora si ha:

$$\int_0^b f(\alpha)\, d\alpha = \int_0^b \alpha\, d\alpha = \frac{b^2}{2},$$

$$\int_0^b f(\alpha) \cos\frac{2n\pi(x-\alpha)}{b}\, d\alpha = \int_0^b \alpha \cos\frac{2n\pi(x-\alpha)}{b}\, d\alpha =$$

$$= -\left[\frac{b\alpha}{2n\pi} \operatorname{sen}\frac{2n\pi(x-\alpha)}{b}\right]_0^b + \frac{b^2}{4n^2\pi^2}\left(\cos\frac{2n\pi(x-\alpha)}{b}\right)_0^b =$$

$$= -\frac{b^2}{2n\pi} \operatorname{sen}\frac{2n\pi x}{b},$$

e si trova così che la serie corrispondente è:

$$\frac{b}{2} - \frac{b}{\pi}\sum_0^\infty \frac{\operatorname{sen}\frac{2n\pi x}{b}}{n}.$$

In modo analogo, colla (13) e (14) si trovano le serie:

$$\frac{b}{2} - \frac{4b}{\pi^2}\sum_0^\infty \frac{\cos\frac{(2n+1)\pi x}{b}}{(2n+1)^2}, \qquad \frac{2b}{\pi}\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{b}}{n},$$

e quindi si conclude che pei valori di x fra 0 e b si hanno le formole seguenti:

$$(20)\quad \begin{cases} x = \dfrac{b}{2} - \dfrac{b}{\pi} \sum_{1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sen} \dfrac{2 n \pi x}{b}}{n}, \\ x = \dfrac{b}{2} - \dfrac{4b}{\pi^2} \sum_{0}^{\infty} \dfrac{\cos \dfrac{(2n+1)\pi x}{b}}{(2n+1)^2}, \\ x = \dfrac{2b}{\pi} \sum_{1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{\operatorname{sen} \dfrac{n \pi x}{b}}{n}, \end{cases}$$

la prima delle quali però non vale per $x=0$ ed $x=b$, mentre la seconda vale anche per questi valori di x, e la terza vale anche fra 0 e $-b$ e per $x=0$, ma non per $x=\pm b$.

Supponendo $b=\pi$ in queste formole, si ottengono le altre:

$$(21)\quad \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} - x = \sum_{1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sen} 2 n x}{n}, \\ \dfrac{\pi}{2} - x = \dfrac{4}{\pi} \sum_{0}^{\infty} \dfrac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}, \\ \dfrac{1}{2} x = \sum_{1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{\operatorname{sen} n x}{n}, \end{cases}$$

la prima delle quali vale per x compreso fra 0 e π (0 e π escl.), la seconda vale per gli stessi valori di x, inclusi però anche i valori 0 e π, e la terza vale per x compreso fra $-\pi$ e π, ma esclusi i valori $\pm\pi$.

Le formole (20) e (21) conducono anch' esse ai valori di $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi^2}{8}$ che trovammo sopra. Applicando poi alla seconda delle (20) la integrazione definita fra 0 ed x per $x \leq b$ (il che può farsi sia perchè la serie compresa nel secondo membro è evidentemente convergente in ugual grado fra 0 e b, sia perchè, come diremo in seguito, alle serie di Fourier è sempre applicabile la integrazione definita), si ottiene la formola seguente:

$$\frac{x^2}{2} = \frac{b}{2}\,x - \frac{4\,b^2}{\pi^3}\sum_0^\infty \frac{\operatorname{sen}\dfrac{(2\,n+1)\pi x}{b}}{(2\,n+1)^3}, \tag{22}$$

che vale pei valori di x fra 0 e b (0 e b incl.), e questa con una nuova integrazione definita darebbe altre formole notevoli.

Facendo in questa $x = \frac{b}{2}$ si ottiene l' altra:

$$\frac{\pi^3}{32} = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(2\,n+1)^3} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} \cdot \cdot \cdot$$

4.° Vogliasi ora una funzione che sia uguale a zero per tutti i valori di x fra $-b$ e b, tranne per quelli compresi fra $x'-\beta$ e $x'+\beta$, pei quali sia uguale ad una costante A.

Le serie da applicarsi in questo caso sono le (12), e poichè si ha ora:

$$\int_{-b}^{b} f(\alpha)\,d\alpha = \mathrm{A}\int_{x'-\beta}^{x'+\beta} d\alpha = 2\,\mathrm{A}\,\beta\,,$$

$$\int_{-b}^{b} f(\alpha)\cos\frac{n\pi(x-\alpha)}{b}\,d\alpha = \int_{x'-\beta}^{x'+\beta} \mathrm{A}\cos\frac{n\pi\,(x-\alpha)}{b}\,d\alpha = -\frac{\mathrm{A}b}{n\,\pi}\left\{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{b}(x-\alpha)\right\}_{x'-\beta}^{x'+\beta} =$$

$$= 2\,\frac{\mathrm{A}\,b}{n\,\pi}\operatorname{sen}\frac{n\,\pi\,\beta}{b}\cos\frac{n\pi}{b}(x-x')\,,$$

si trova che la serie che rappresenta l' attuale funzione è la seguente:

$$\frac{\mathrm{A}\beta}{b} + \frac{2\,\mathrm{A}}{\pi}\sum_1^\infty \frac{\operatorname{sen}\dfrac{n\,\pi\,\beta}{b}\cos\dfrac{n\,\pi}{b}(x-x')}{n}$$

Questa serie però per $x = x'-\beta$ e $x = x'+\beta$ dà per valore della funzione $\frac{\mathrm{A}}{2}$.

5.° Vogliasi infine una funzione $f(x)$ che fra 0 e $\frac{\pi}{2}$ sia uguale ad x, e fra $\frac{\pi}{2}$ e π sia uguale a $\pi - x$.

Applicando la (14) col farvi $b=\pi$ si trova subito cogli stessi processi che:

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\left\{\frac{\operatorname{sen} x}{1^2}-\frac{\operatorname{sen} 3x}{3^2}+\frac{\operatorname{sen} 5x}{5^2}-\frac{\operatorname{sen} 7x}{7^2}+\cdots\right\}$$

e questa formola vale per tutti i valori di x fra 0 e π (0 e π incl.).

V. Altre forme analitiche delle funzioni di una variabile reale date arbitrariamente in un certo intervallo.

53. Indicati i casi principali in cui una funzione $f(x)$ data arbitrariamente fra $-\pi$ e π o fra a e b è esprimibile analiticamente per serie di Fourier, noi dovremmo passare ad esporre le proprietà principali di queste serie. Siccome però vi sono anche espressioni analitiche più generali per le funzioni date arbitrariamente fra a e b che quì pure vogliamo far conoscere, e anche queste espressioni analitiche hanno molte delle proprietà che dovremmo dimostrare per la serie di Fourier, noi troviamo utile di dare prima queste nuove espressioni analitiche delle funzioni che quì consideriamo; tanto più che esse si ottengono con un metodo del tutto simile a quello che ci ha condotto alla serie di Fourier, valendosi cioè dei risultati generali ottenuti nel Capitolo III.

Riprendiamo perciò la solita funzione $\varphi(x,h)$; ma per avere la massima generalità, introduciamo anche una nuova variabile α, considerando cioè la funzione $\varphi(x, \alpha, h_n)$ ove le h_n sono numeri positivi che crescono indefinitamente insieme al numero intero e positivo n, e per la quale si ammetterà anche che, se a' e b' sono numeri qualunque diversi da zero, e dello stesso segno, e compresi fra certi limiti che dipenderanno ordinariamente da α, la funzione stessa $\varphi(x, \alpha, h_n)$ per x compreso fra a', b' (a' e b' incl.) e per qualunque valore di n si mantenga sempre numericamente inferiore a un numero finito (variabile

con a' e b'), e gli integrali $\int_{a'}^{b'} \varphi(x, \alpha, h_n)\, dx$ abbiano per limite zero per $n=\infty$; mentre invece gli integrali $\int_0^{\varepsilon} \varphi(x, \alpha, h_n)\, dx$, $\int_{-\varepsilon}^{0} \varphi(x, \alpha, h_n)$ per ε comunque piccolo e positivo al crescere indefinito di n tendono ambedue verso una stessa quantità finita e diversa da zero G indipendente da ε e da α.

S'indichi ora con $f(x)$ una funzione data arbitrariamente fra a e b ($a<b$), che è atta alla integrazione in questo intervallo insieme ai prodotti $f(x)\, \varphi(x-\alpha, \alpha, h_n)$ ove α è un numero qualunque fra a e b (a e b incl.), e che se diviene infinita resta atta alla integrazione anche ridotta ai suoi valori assoluti; e per la funzione di cui ci serviremo $\varphi(x, \alpha, h_n)$ si ammetta inoltre che per ogni valore di α i numeri indicati sopra con a' e b' possano prendersi in un modo qualunque fra $a-\alpha$ e 0 e fra 0 e $b-\alpha$ (0 escl. e gli estremi pure al più escl. per $\alpha=a$ e $\alpha=b$), ciò che nel caso speciale di $\varphi(x, \alpha, h_n)$ indipendente da α porta che i numeri a' e b' possano prendersi in un modo qualunque fra $-(b-a)$ e 0 e fra 0 e $b-a$ (0 escl. e a e b pure al più escl.).

Allora considerando la serie:

$$\frac{1}{2G}\int_a^b f(x)\, \varphi(x-\alpha, \alpha, h_0)\, dx +$$

$$+ \frac{1}{2G}\sum_1^{\infty} \int_a^b f(x) \{ \varphi(x-\alpha, \alpha, h_n) - \varphi(x-\alpha, \alpha, h_{n-1}) \} dx,$$

per un valore qualsiasi di α fra a e b, si vedrà subito che la somma dei suoi primi $n+1$ termini è $\frac{1}{2G}\int_a^b f(x)\, \varphi(x-\alpha, \alpha, h_n) dx$; e questa somma per α diverso da a e b col porre $x-\alpha=t$ può scriversi:

$$\frac{1}{2G}\int_{a-\alpha}^{-\varepsilon} f(\alpha+t)\,\varphi(t,\alpha,h_n)\,dt+\int_{\varepsilon}^{b-\alpha} f(\alpha+t)\,\varphi(t,\alpha,h_n)\,dh+$$

$$+\frac{1}{2G}\int_{-\varepsilon}^{0} f(\alpha+t)\,\varphi(t,\alpha,h_n)\,dt+\frac{1}{2G}\int_{0}^{\varepsilon} f(\alpha+t)\,\varphi(t,\alpha,h_n)\,dt\,;$$

mentre se α è uguale ad a o a b uno dei due primi integrali e uno dei due ultimi verranno a mancare; e quando (come accade nel caso della serie di Fourier in cui $\varphi(x,\alpha,h_n)=\frac{\operatorname{sen} h_n x}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}$, con $h_n=\frac{(2n+1)}{2}$) per $\alpha=a$ o $\alpha=b$ i punti $b-a$, o $-(b-a)$ figurino come il punto zero per la funzione corrispondente $\varphi(x,a,h_n)$ o $\varphi(x,b,h_n)$, allora anche quello dei due primi integrali che rimane si spezzerà in due l'uno dei quali sarà della forma degli ultimi e l' altro sarà della forma dei primi.

Ricordando dunque i risultati generali del Cap. 3.^{0}, e supponendo che fra $-\varepsilon$ e ε, ove ε è un numero piccolissimo che può anche dipendere dal valore che si considera per α, la funzione $\varphi(x,\alpha,h_n)$ soddisfi almeno ad alcune delle condizioni cui doveva soddisfare fra 0 e ε la funzione indicata con $\varphi(x,h)$ nei teoremi del §. 39; e ammettendo inoltre che se per $\alpha=a$ o $\alpha=b$ i punti $\pm(b-a)$ non possono prendersi come punti a' e b', essi figurino allora come il punto zero per la funzione corrispondente $\varphi(x,a,h_n)$ o $\varphi(x,b,h_n)$, noi vediamo senz' altro che per tutti i punti α interni all'intervallo (a,b) nei quali $f(x)$ è finita e continua o ha tutt' al più una discontinuità ordinaria, e nei cui intorni a destra e a sinistra soddisfa a una delle condizioni del §. 39, la serie:

$$(1)\qquad \frac{1}{2G}\int_{a}^{b} f(x)\,\varphi(x-\alpha,\alpha,h_0)dx+$$

$$+\frac{1}{2G}\sum_{1}^{\infty}\int f(x)\left\{\varphi(x-\alpha,\alpha,h_n)-\varphi(x-\alpha,\alpha,h_{n-1})\right\}dx$$

sarà convergente e avrà per somma $f(\alpha)$ o $\frac{f(\alpha+0)+f(\alpha-0)}{2}$ se in questo punto $f(x)$ è continua, o ha una discontinuità ordinaria; e se il punto α è uno degli estremi a e b dell'intervallo e in esso sono verificate le condizioni testè indicate, la serie (1) sarà ancora convergente e avrà per somma uno dei valori $\frac{1}{2}f(a+0)$, $\frac{1}{2}f(b-0)$, o $\frac{f(a+0)+f(b-0)}{2}$ dipendentemente dalle particolarità che presenteranno le funzioni $\varphi(x, a, h_n)$, $\varphi(x, b, h_n)$ nei punti $b-a$ o $-(b-a)$ come sopra dicemmo; talchè, fatta eccezione pei punti d'infinito e delle discontinuità di seconda specie che $f(x)$ avesse fra a e b e per quelli nei cui intorni non fosse soddisfatta nessuna delle condizioni del §. 39. e colle indicate avvertenze pei punti delle discontinuità ordinarie e pei punti estremi a e b, la serie (1) ci darà una espressione analitica in serie convergente per la funzione $f(x)$ che abbiamo preso a considerare nell'intervallo (a, b).

Se poi col mutare x in $-x$ la funzione $\varphi(x, \alpha, h_n)$ non muta, allora si potranno riunire i due integrali

$$\frac{1}{2G}\int_{-\varepsilon}^{0} f(\alpha+t)\,\varphi(t, \alpha, h_n)\,dt\,,\quad \frac{1}{2G}\int_{0}^{\varepsilon} f(\alpha+t)\,\varphi(t, \alpha, h_n)\,dt$$

riducendoli all'unico $\frac{1}{2G}\int_{0}^{\varepsilon}\{f(\alpha+t)+f(\alpha-t)\}\,\varphi(t, \alpha, h_n)\,dt$; e quindi in tal caso invece di richiedere che sì a destra che a sinistra dei punti interni α che si considerano sia soddisfatta per la funzione $f(x)$ una almeno delle condizioni del §. 39, basterà che una di queste condizioni medesime risulti soddisfatta per la funzione di t $F(t)=f(\alpha+t)+f(\alpha-t)$ nell'intorno a destra del punto $t=0$.

54. S'intende, come già abbiamo detto, che in tutti questi casi la funzione $\varphi(x, \alpha, h_n)$ considerata per ogni valore speciale di α, oltre che alle solite condizioni generali, deve soddisfare negli intorni del punto $x=0$ alle condizioni che per

essa via via abbiamo poste nel Cap. III; talchè in particolare se si saprà soltanto che pel valore speciale di α che si considera la funzione $\varphi(x, \alpha, h_n)$ soddisfa alle solite condizioni generali, e tale che l'integrale $\int_0^x \varphi(x, \alpha, h_n)\,dx$ pei valori di x fra $-\varepsilon$ e ε (ε arbitrariamente piccolo) è sempre numericamente inferiore a un numero finito, si potrà soltanto affermare che per quel valore di x la funzione $f(x)$ è sviluppabile secondo la serie (1) tutte le volte che in intorni sufficientemente piccoli a destra e a sinistra di α essa non fà oscillazioni, o essendo continua ammette una derivata che resta atta alla integrazione anche ridotta ai suoi valori assoluti, o anche soddisfa a una di quelle altre condizioni che per l'integrale $\int_0^x \varphi(x, h)dx$ richiedevano soltanto che esso fosse sempre numericamente inferiore a un numero finito, come ad es. a quella del §. 29. o a quella del §. 37. nel caso di $\alpha(x)=1$; mentre se $\varphi(x, \alpha, h_n)$ soddisfarà alle condizioni che si avevano per $\varphi(x, h)$ nel §. 32. allora per l'applicabilità della serie (1) alla funzione $f(x)$ per $x=\alpha$, basterà che nei soliti intorni di α sia soddisfatta una qualunque delle condizioni del §. 39.

Se poi $\varphi(x,\alpha,h_n)$ sarà tale che i suoi integrali $\int_0^\varepsilon \varphi(x, \alpha, h_n)dx$, considerati per ogni valore speciale di α separatamente, al crescere indefinito di n si mantengano inferiori a un numero finito anche quando a $\varphi(x,\alpha,h_n)$ si sostituiscono i suoi valori assoluti, allora non sarà necessario porre per $f(x)$ le condizioni ora indicate, ma in forza del teorema del §. 24. e delle osservazioni del §. 41. quando si sappia soltanto che $f(x)$ è atta alla integrazione fra a e b, e che se diviene infinita si mantiene atta alla integrazione anche ridotta ai suoi valori assoluti, si potrà senz'altro affermare che in tutti i punti α fra a e b nei quali $f(x)$ è finita e continua e ha soltanto discontinuità ordinarie, essa può rappresentarsi con una serie convergente della forma (1), colle solite avvertenze pei punti di discontinuità e pei punti estremi, per modo che in par-

ticolare „ con queste ultime funzioni $\varphi(x, \alpha, h_n)$, una funzione
„ $f(x)$ che fra a e b sia sempre finita e continua potrà rap-
„ presentarsi analiticamente per mezzo di una *stessa* serie (1)
„ in ogni punto α fra a e b, fatta tutt' al più eccezione pei
„ punti estremi a e b pei quali la somma della serie sarà
„ $\frac{1}{2}f(a)$, $\frac{1}{2}f(b)$ o $\frac{f(a)+f(b)}{2}$ „. E in questo caso della conti-
nuità di $f(x)$ fra a e b, siccome possono sempre determinarsi due costanti p e q tali che la funzione $f(x)+px+q$ si annulli per $x=a$ e $x=b$, basterà applicare la serie (1) a questa funzione $f(x)+px+q$ per ottenere subito „ uno sviluppo
„ (1) di $f(x)$ che varrà per l' *intiero* intervallo (a, b), e pel
„ quale non si presenterà più neppure la eccezione ora indicata
„ rispetto ai punti estremi a e b „.

Si aggiunge poi che se, preso un valore qualunque di α fra a e b, si troverà che la funzione $\varphi(x, \alpha, h_n)$, considerata pei valori di x fra $a-\alpha$ e $b-\alpha$, anche al crescere indefinito di n fà soltanto un numero finito di oscillazioni, allora per quanto si disse in fine del §. 41, nel caso di un numero finito di punti d' infinito di $f(x)$ (quando essi vi siano) non sarà neppure necessario richiedere che $f(x)$ resti atta alla integrazione negli intorni di questi punti anche riducendola ai suoi valori assoluti.

Ed è pur notevole che „ come accade per gli sviluppi di
„ Fourier (§. 46), così anche per tutti gli sviluppi che qui con-
„ sideriamo, la loro validità in un punto x fra a e b (a e b al
„ più escl.), non dipende affatto dal modo di comportarsi di $f(x)$
„ nei singoli punti fuori di x, ma soltanto dal suo modo di
„ comportarsi negli intorni del medesimo punto x „.

55. In particolare dunque, prendendo una volta $\varphi(x, \alpha, h_n)=\frac{h_n\varphi_n}{1+h_n^2\varphi_n^2x^2}$, e un altra $\varphi(x, \alpha, h_n)=$ $=h_n\varphi_n e^{-h_n\varphi_n x}$ per x positivo, e $\varphi(x, \alpha, h_n)=h_n\varphi_n e^{h_n\varphi_n x}$ per x negativo, con $h_0=0$, e φ_n funzione soltanto di α sempre positiva, finita e discosta da zero più di un certo numero per tutti i valori di x fra a e b (a e b incl.), si osserverà che la funzione $\varphi(x, \alpha, h_n)$ verrà a soddisfare alle condizioni ora indicate, giacchè per p positivo si ha:

$$\lim_{n=\infty}\int_0^p \frac{h_n\varphi_n\,dx}{1+h_n^2\varphi_n^2x^2}=\lim_{n=\infty}\int_{-p}^0 \frac{h_n\varphi_n\,dx}{1+h_n^2\varphi_n^2x^2}=[\operatorname{arctg} h_n\varphi_n p]_{h_n=\infty}=\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{n=\infty}\int_0^p h_n\varphi_n e^{-h_n\varphi_n x}dx = \lim_{n=\infty}\int_{-p}^0 h_n\varphi_n e^{h_n\varphi_n x}dx =$$

$$= \left[1 - e^{-h_n\varphi_n x}\right]_{h_n=\infty} = 1, \text{ec};$$

e quindi, per quanto testè dicemmo si potrà affermare che una funzione $f(x)$ atta alla integrazione fra a e b può rappresentarsi colla serie:

$$\frac{1}{\pi}\sum_1^\infty \int_a^b f(x)\left\{\frac{h_n\varphi_n}{1+h^2_n\varphi^2_n(x-\alpha)^2} - \frac{h_{n-1}\varphi_{n-1}}{1+h^2_{n-1}\varphi^2_{n-1}(x-\alpha)^2}\right\}dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_1^\infty \left\{h_n\varphi_n - h_{n-1}\varphi_{n-1}\right\}\int_a^b f(x)\frac{1-h_{n-1}h_n\varphi_{n-1}\varphi_n(x-\alpha)^2}{\left\{1+h^2_{n-1}\varphi^2_{n-1}(x-\alpha)^2\right\}\left\{1+h^2_n\varphi^2_n(x-\alpha)^2\right\}}dx,$$

o coll' altra:

$$\frac{1}{2}\sum_1^\infty\left[\int_0^\alpha f(x)\left\{h_n\varphi_n e^{h_n\varphi_n(x-\alpha)} - h_{n-1}\varphi_{n-1} e^{h_{n-1}\varphi_{n-1}(x-\alpha)}\right\}dx + \right.$$

$$\left. + \int_\alpha^b f(x)\left\{h_n\varphi_n e^{-h_n\varphi_n(x-\alpha)} - h_{n-1}\varphi_{n-1} e^{-h_n\varphi_n(x-\alpha)}\right\}dx\right]$$

colle solite avvertenze pei punti delle discontinuità ordinarie, e con esclusione di quelli delle discontinuità di seconda specie e degli infiniti della funzione, per gli ultimi dei quali (punti d' infinito) quando siano in numero infinito conviene anche ammettere che, eccettuatine tutt' al più un numero finito, negli intorni degli altri la funzione $f(x)$ resti atta alla integrazione anche ridotta ai suoi valori assoluti; e coll' avvertenza infine che nei punti estremi a e b le serie precedenti danno per valore della funzione $\frac{1}{2}f(a+0)$ e $\frac{1}{2}f(b+0)$ tutte le volte che queste quantità sono determinate e finite.

Osservando poi che se k è positivo, si ha per formole note:

$$\frac{k}{1+k^2x^2}=\int_0^\infty e^{-\frac{\lambda}{k}}\cos\lambda x\,d\lambda\,,\quad e^{-kx}=\frac{2k}{\pi}\int_0^\infty\frac{\cos\lambda x\,d\lambda}{k^2+\lambda^2}\,,$$

ove anche x nella seconda è positivo, si vede subito che le serie precedenti possono anche ridursi alle altre:

$$\frac{1}{\pi}\sum_1^\infty\int_a^b f(x)\,dx\int_0^\infty\cos\lambda(x-\alpha)\left(e^{\frac{-\lambda}{h_n\varphi_n}}-e^{\frac{-\lambda}{h_{n-1}\varphi_{n-1}}}\right)dx\,,$$

$$\frac{1}{\pi}\sum_1^\infty\int_a^b f(x)\,dx\int_0^\infty\lambda^2\cos\lambda(x-\alpha)\left\{\frac{1}{h^2_{n-1}\varphi^2_{n-1}+\lambda^2}-\frac{1}{h^2_n\varphi^2_n+\lambda^2}\right\}d\lambda=$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_1^\infty\{h^2_n\varphi^2_n-h^2_{n-1}\varphi^2_{n-1}\}\int_0^b f(x)\,dx\int_0^\infty\frac{\lambda^2\cos\lambda(x-\alpha)\,d\lambda}{[h^2_{n-1}\varphi^2_{n-1}+\lambda^2_n][h^2_n\varphi^2_n+\lambda^2]}$$

e in queste h_n e φ_n devono soddisfare soltanto alle condizioni poste sopra; talchè può prendersi per es. $h_n=\sqrt{n}$, $\varphi_n=e^{k\alpha}$ con k costante, e così si può ridurre per es. la seconda serie all' altra:

$$\frac{e^{2k\alpha}}{\pi}\sum_1^\infty\int_a^b f(x)\,dx\int_0^\infty\frac{\lambda^2\cos\lambda(x-\alpha)\,d\lambda}{\left\{(n-1)e^{2k\alpha}+\lambda^2\right\}\left\{n\,e^{2k\alpha}+\lambda^2\right\}}\,;$$

e „ questa, come le precedenti ed altre che potrebbero trovarsi „ al modo stesso, servono a rappresentare analiticamente qualsiasi funzione continua in ogni punto x fra a e b fatta soltanto eccezione pei punti estremi quando in essi il valore „ della funzione non sia lo zero; e servono pure, come abbiamo detto, e colle avvertenze fatte sopra, per qualsiasi funzione atta all'integrazione fra a e b „; e col particolarizzare $f(x)$, specialmente dopo invertite le integrazioni, come appunto è quasi sempre possibile di fare, conducono a molte formole notevoli.

Merita poi di esser notato che questi risultati ci danno

il modo di ottenere infinite espressioni analitiche di funzioni date arbitrariamente fra certi limiti, e ci permettono di dire in particolare che „ le funzioni sempre finite e continue in un in-
„ tervallo finito hanno sempre infinite espressioni analitiche
„ che valgono per qualunque punto dello stesso intervallo,
„ quando si eccettuino tutt' al più gli estremi „.

56. Ora venendo a casi particolari rispetto alla funzione $\varphi(x, \alpha, h_n)$ ammettiamo che (come nel caso di $\varphi(x, \alpha, h_n) = \dfrac{\operatorname{sen} h_n x}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}$ con $h_n = \dfrac{2n+1}{2}$, che corrisponde alla serie di Fourier) si abbia:

$$\varphi(x-\alpha, \alpha, h_n) - \varphi(x-\alpha, \alpha, h_{n-1}) = \mathrm{H}_{n,1}(\alpha)\,\mathrm{K}_{n,1}(x) + \\ + \mathrm{H}_{n,2}(\alpha)\,\mathrm{K}_{n,2}(x) + \ldots + \mathrm{H}_{n,m}(\alpha)\,\mathrm{K}_{n,m}(x), \tag{2}$$

ove m è un numero fisso, e le $\mathrm{H}_{n,s}(\alpha)$ sono funzioni della sola α, mentre le $\mathrm{K}_{n,s}(x)$ sono funzioni della sola x, e dipendono le une e le altre dagli indici n e s.

Allora la serie (1) corrispondente prenderà la forma:

$$\frac{1}{2\mathrm{G}}\int_a^b f(x)\,\varphi(x-\alpha, \alpha, h_0)\,dx + \frac{1}{2\mathrm{G}}\sum_1^\infty \Big\{ \mathrm{P}_{n,1}\,\mathrm{H}_{n,1}(\alpha) + \\ + \mathrm{P}_{n,2}\,\mathrm{H}_{n,2}(\alpha) + \ldots + \mathrm{P}_{n,m}\,\mathrm{H}_{n,m}(\alpha) \Big\}, \tag{3}$$

ove $\mathrm{P}_{n,1}$, $\mathrm{P}_{n,2} \ldots \mathrm{P}_{n,m}$ sono coefficienti costanti determinati dalla formola:

$$\mathrm{P}_{n,s} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{K}_{n,s}(x)\,dx,$$

talchè „astrazion fatta dal termine $\dfrac{1}{2\mathrm{G}}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\varphi(x-\alpha, \alpha, h_0)\,dx$,
„ quando sia data una funzione $\varphi(x-\alpha, \alpha, h_n)$ dotata delle
„ solite proprietà generali e di quelle del §. 24, o dei §§. se-

„ guenti, e per la quale si abbia la formola (2), avremo una
„ espressione analitica di $f(x)$ in serie di funzioni $H_{n,s}(\alpha)$
„ come la (3) che varrà nei soliti casi „.

Qui poi giova osservare che le condizioni che sempre abbiamo richiesto per $\varphi(x, h)$ o $\varphi(x-\alpha, \alpha, h_n)$ possono rendersi meno restrittive; poichè se nel teorema del §. 22. ammettiamo che la funzione ivi indicata con $\varphi(x,h)$ non si mantenga sempre numericamente inferiore a un certo numero quando x si avvicina a un numero finito di punti fra a e b, separando questi punti con piccoli intorni e poi ripetendo la dimostrazione che si fece del teorema medesimo si giunge immediatamente a concludere che „ esso continua a sussistere anche se la funzione ivi in-
„ dicata con $\varphi(x,h)$, soddisfacendo sempre a tutte le altre con-
„ dizioni che allora si posero, cessa di esser finita, o almeno
„ cresce indefinitamente con h in un numero finito di punti fra
„ a e b, o si è incerti, purchè allora qualunque sia h l'integrale
„ $\int f(x)\, \varphi(x, h)\, dx$ esteso a intorni sufficientemente piccoli
„ degli stessi punti e la cui ampiezza non dipenda da h, resti
„ sempre numericamente inferiore a quel numero che più ci piace,
„ anche quando la funzione sotto il segno integrale si riduce a
„ quella dei suoi valori assoluti „. Ed è in forza di questa osservazione che noi possiamo anche asserire che se la funzione indicata sopra con $\varphi(x-\alpha, \alpha, h_n)$ cesserà di esser finita, o almeno crescerà indefinitamente con n al tendere di x a un numero finito di valori speciali fra a e b diversi da α, o si sarà incerti ma, almeno per gli altri valori di x, tutte le altre condizioni saranno ancora soddisfatte, allora lo sviluppo precedente continuerà pure a sussistere tutte le volte che per qualsiasi valore di n l'integrale $\int f(x)\, \varphi(x-\alpha, \alpha, h_n) dx$ esteso a intorni sufficientemente piccoli degli stessi punti la cui ampiezza non dipende da n resti sempre numericamente inferiore a quel numero che più ci piace anche riducendo la funzione $f(x)\, \varphi(x-\alpha, \alpha, h_n)$ ai suoi

valori assoluti; talchè appunto non è necessario che sia soddisfatta la condizione che $\varphi(x-\alpha,\alpha,h_n)$ sia sempre finita, purchè allora $f(x)$ sia tale che resti soddisfatta la condizione ora indicata pel prodotto $f(x)\,\varphi(x-\alpha,\alpha,h_n)$.

57. Ora è da osservare che quando invece della funzione $\varphi(x,\alpha,h_n)$ siano date a priori le funzioni $H_{n,s}(\alpha)$, non sempre sarà possibile (almeno con questi processi) sviluppare nei soliti casi una funzione data arbitrariamente $f(x)$ secondo una serie di funzioni $H_{n,s}(\alpha)$ come la (3); però evidentemente, per quanto abbiamo detto al §. 53, onde esser sicuri che si ha questo sviluppo bisognerà che si possano determinare le funzioni $\varphi(x-\alpha,\alpha,h_0)$ e $K_{n,s}(x)$ per tutti i valori di x e di α fra a e b in modo che la somma:

$$(4)\qquad \varphi(x-\alpha,\alpha,h_0)+\sum_{r=1}^{r=n}\Big\{H_{r,1}(\alpha)\,K_{r,1}(x)+ \\ +H_{r,2}(\alpha)K_{r,2}(x)+\ldots+H_{r,m}(\alpha)\,K_{r,m}(x)\Big\}$$

rappresenti una funzione $\varphi(x-\alpha,\alpha,h_n)$ dotata delle solite proprietà generali dei §§. 21 e 53 pei valori di x e di α fra a e b, e per la quale riescano soddisfatte le condizioni che si richiedono per l'applicazione del teorema del §. 24 o di uno di quelli del §. 39.

Ponendo in questa somma $x-\alpha=t$, essa diverrà:

$$(5)\qquad \varphi(t,\alpha,h_0)+\sum_{r=1}^{r=n}\Big\{H_{r,1}(\alpha)\,K_{r,1}(\alpha+t)+ \\ +H_{r,2}(\alpha)K_{r,2}(\alpha+t)+\ldots+H_{r,m}(\alpha)K_{r,m}(\alpha+t)\Big\}\ ;$$

quindi, perchè possa corrispondere a una funzione $\varphi(x,h)$ o $\varphi(x-\alpha,\alpha,h_n)$ per la quale siano soddisfatte le condizioni dei §§. 21 e 53, occorre intanto evidentemente che la serie:

$$(6)\qquad \int_0^t\varphi(t,\alpha,h_0)dt+\sum_1^{\infty}\Big\{H_{n,1}(\alpha)\int_0^t K_{n,1}(\alpha+t)\,dt+ \\ +H_{n,2}(\alpha)\int_0^t K_{n,2}(\alpha+t)\,dt+\ldots+H_{n,m}(\alpha)\int_0^t K_{n,m}(\alpha+t)\,dt\Big\}\ ,$$

per α compreso fra a e b (a e b al più escl,) e per t diverso da zero e compreso fra $a-\alpha$ e 0 o fra 0 e $b-\alpha$ ($b-a$ e $-(b-a)$ al più esclus. nel caso di $\alpha=a$, o $\alpha=b$) sia convergente e abbia per somma una stessa quantità diversa da zero G per t positivo e $-$G per t negativo, che cangia segno con t ma che del resto è indipendente dai valori scelti per α e per t fra i limiti indicati.

Oltre a ciò, se ε_1 è un numero positivo piccolo a piacere, pei valori di t fra $a-\alpha$ e $-\varepsilon_1$, e fra ε_1 e $b-\alpha$ (gli estremi $\pm(b-a)$ nel caso di $\alpha=a$ o $\alpha=b$ al più escl.), la somma (5), che non è altro che la derivata rispetto a t della somma dei primi $n+1$ termini della espressione (6), deve per qualunque valore di n mantenersi numericamente inferiore a un numero finito; e inoltre pei valori di t compresi fra $-\varepsilon$ e ε, ove ε è un altro numero positivo piccolissimo che potrà anche dipendere dal valore che si considera per α, la stessa somma dovrà soddisfare alle condizioni che si richiedevano fra 0 e ε per la funzione $\varphi(x,h)$ in quelli dei teoremi dei §§. 24 o 39 che vorremo applicare; dunque quando tutte queste particolarità si verifichino, intendendo che nella (3) G indichi la somma della serie (6) per t positivo si avranno i precedenti sviluppi (3) di $f(x)$ pei soliti punti α fra a e b nei quali è finita, colle solite particolarità pei punti di discontinuità e pei punti estremi, e colle limitazioni o nò portate dai teoremi dei §§. 24 e 39 dipendentemente dalla natura della funzione $\varphi(t,\alpha,h_n)$ che ora viene rappresentata dalla somma (5) o da $\frac{\partial G_{n,t}}{\partial t}$, se $G_{n,t}$ è la somma dei primi $n+1$ termini della serie (6).

E così in particolare quando le condizioni suindicate rispetto alla serie (6) e alla derivata $\frac{\partial G_{n,t}}{\partial t}$ della somma $G_{n,t}$ dei suoi primi $n+1$ termini siano soddisfatte, se avverrà che questa somma $G_{n,t}$ (che ora corrisponde all'integrale $\int_0^x \varphi(x,h)\,dx$ che si aveva nel cap. III.) per t compreso fra $-\varepsilon$ e ε si mantenga numericamente inferiore a un numero finito qualunque

sia n, gli sviluppi (3) per $f(x)$ varranno per tutti i punti α negli intorni dei quali $f(x)$ non fà infinite oscillazioni o almeno ammette una derivata che resta atta alla integrazione anche riducendola ai suoi valori assoluti; mentre se il prodotto $t\frac{\partial G_{n,t}}{\partial t}$ col tendere a zero di t resterà numericamente inferiore a un numero finito, allora gli stessi sviluppi varranno pei punti α pei quali i rapporti incrementali $\frac{f(\alpha\pm t)-f(\alpha)}{\pm t}$ si mantengono sempre finiti, o almeno se crescono indefinitamente restano atti all'integrazione fra 0 e ε anche ridotti ai valori assoluti ec.; e per gli altri teoremi dei §§. 24 o 39 converrà aver riguardo anche alla funzione dei valori assoluti di $\frac{\partial G_{n,t}}{\partial t}$, o ai massimi e minimi di $G_{n,t}$ per t fra $-\varepsilon$ e ε.

Valendosi poi della osservazione fatta nel paragrafo precedente si può aggiungere che quando per un numero finito di valori $\alpha_1, \alpha_2, ..$ di t fra $a-\alpha$ e $-\varepsilon_1$ o fra ε_1 e $b-\alpha$, la somma (5) o $\frac{\partial G_{n,t}}{\partial t}$ non si mantenga sempre finita o, almeno cresca indefinitamente con n, o si sia incerti, allora lo sviluppo (3) per $f(x)$ continuerà ancora a sussistere, purchè qualunque sia n l'integrale del prodotto $f(\alpha+t)\frac{\partial G_{n,t}}{\partial t}$ esteso ad intorni sufficientemente piccoli degli stessi punti, la cui ampiezza non dipenda da n, si mantenga inferiore a quel numero che più ci piace anche riducendo il prodotto medesimo ai suoi valori assoluti. E quando questa condizione si trovi verificata, allora non occorrerà esaminare se pei valori eccezionali $\alpha_1, \alpha_2, ..$ di t ora indicati sono o nò soddisfatte le altre condizioni che si hanno per $G_{n,t}$ poichè esse verranno soddisfatte di per sè. — Questa osservazione, senza stare a ripeterla ogni volta, la intenderemo fatta ora anche per il seguito.

58. Si aggiunga ora la condizione che (come accade negli sviluppi conosciuti) le funzioni $K_{n,s}(x)$ non differiscano dalle $H_{n,s}(x)$ altro che per fattori costanti $p_{n,s}$ variabili soltanto

dall' una all'altra, e per un fattore fisso $F(x)$ funzione finita della x, per modo cioè che sia $K_{n,s}(x) = p_{n,s} F(x) H_{n,s}(x)$. Allora la serie (6) si ridurrà all' altra:

$$(7) \quad \int_0^t \varphi(t, \alpha, h_0) dt + \sum_1^{\infty} \Big\{ p_{n,1} H_{n,1}(\alpha) \int_0^t F(\alpha+t) H_{n,1}(\alpha+t) \, dt +$$

$$+ p_{n,2} H_{n,2}(\alpha) \int_0^t F(\alpha+t) H_{n,2}(\alpha+t) \, dt + \ldots +$$

$$+ p_{n,m} H_{n,m}(\alpha) \int_0^t F(\alpha+t) H_{n,m}(\alpha+t) \, dt \Big\},$$

mentre la espressione (5) che ora dovrà corrispondere a $\varphi(t, \alpha, h_n)$ diverrà:

$$(8) \quad \frac{\partial G_{n,t}}{\partial t} = \varphi(t, \alpha, h_0) + \sum_{r=1}^{r=n} \Big\{ p_{r,1} H_{r,1}(\alpha) H_{r,1}(\alpha+t) +$$

$$+ p_{r,2} H_{r,2}(\alpha) H_{r,2}(\alpha+t) + \ldots + p_{r,m} H_{r,m}(\alpha) H_{r,m}(\alpha+t) \Big\} F(\alpha+t),$$

essendo al solito $G_{n,t}$ la somma dei primi $n+1$ termini della (7); talchè si può ora affermare che se (dipendentemente soltanto dalla forma che dovrà avere la espressione analitica della funzione da svilupparsi, e non già dalla natura di questa funzione) si potranno determinare le costanti $p_{n,1}, p_{n,2}, \ldots, p_{n,m}$ pei varii valori di n e le funzioni $F(x)$ e $\varphi(t, \alpha, h_0)$ in modo: 1.° che la serie (7) sia convergente per tutti i valori di α fra a e b (a e b al più escl.) e abbia per somma una stessa quantità diversa da zero G per tutti i valori di t diversi da zero e compresi fra 0 e $b-\alpha$, e per quelli fra $a-\alpha$ e 0 abbia invece per somma $-G$ (gli estremi $\pm(b-a)$ nel caso di $a=\alpha$ o $\alpha=b$ al più escl.); 2.° che se ε_1 è un numero diverso da zero e positivo comunque piccolo la derivata $\frac{\partial G_{n,t}}{\partial t}$ della somma $G_{n,t}$ dei suoi primi $n+1$ termini qualunque sia n resti sempre numericamente inferiore a un numero finito finchè t è compreso fra $a-\alpha$ e $-\varepsilon_1$, e fra ε_1 e $b-\alpha$ (gli estr. $\pm(b-a)$ nel caso di $\alpha=a$ o $\alpha=b$ al più escl.);

3.º che la somma $G_{n,t}$ dei primi $n+1$ termini della stessa serie o la sua derivata $\frac{\partial G_{n,t}}{\partial t}$ per t fra $-\varepsilon$ e ε soddisfi alle condizioni indicate nel paragrafo precedente; allora una funzione $f(x)$ data arbitrariamente fra a e b potrà rappresentarsi colla serie:

$$(9) \qquad \frac{1}{2G}\int_a^b f(x)\varphi(x-\alpha,\alpha,h_0)dx+\frac{1}{2G}\sum_1^\infty\Big\{P_{n,1}\,H_{n,1}(\alpha)+ \\ +P_{n,2}\,H_{n,2}(\alpha)+\ldots+P_{n,m}\,H_{n,m}(\alpha)\Big\},$$

ove:

$$(10) \qquad P_{n,s}=p_{n,s}\int_a^b f(x)\,F(x)\,H_{n,s}(x)\,d\,x,$$

e ciò per tutti i punti α fra a e b pei quali la funzione stessa $f(x)$ è finita, colle solite particolarità pei punti estremi e per quelli di discontinuità, e colle limitazioni o nò portate dai teoremi del §. 39. dipendentemente dalle condizioni cui soddisfarà fra $-\varepsilon$ e ε la somma suindicata $G_{n,t}$ o la sua derivata $\frac{\partial G_{n,t}}{\partial t}$.

E se la seconda condizione ora indicata non sarà soddisfatta per un numero finito di valori di t, o si sarà incerti, allora la funzione $f(x)$ dovrà esser tale che il prodotto $f(\alpha+t)\,\frac{\partial G_{n,t}}{\partial t}$ soddisfi alle condizioni poste in fine del paragrafo precedente.

59. Se poi, come pure accade negli sviluppi conosciuti, il primo termine della serie (9) avrà la forma degli altri, per modo che la serie stessa possa scriversi:

$$\frac{1}{2G}\sum_1^\infty\Big\{P_{n,1}\,H_{n,1}(\alpha)+P_{n,2}\,H_{n,2}(\alpha)+\ldots+P_{n,m}\,H_{n,m}(\alpha)\Big\},$$

con $P_{n,s}$ determinato sempre dalla (10), e se a questa serie l'integrazione definita dovrà essere applicabile termine a termine

almeno da a a b, e si avrà:

$$\int_a^b F(x)\, H_{n,s}(x)\, H_{p,t}(x)\, d\,x = 0$$

quando non sia ad un tempo $n=p$, $s=t$, allora dovrà essere:

$$\frac{P_{n,s}}{2\,G} = \frac{\int_a^b f(x)\, F(x)\, H_{n,s}(x)\, d\,x}{\int_a^b F(x)\, H^2_{n,s}(x)\, d\,x},$$

e quindi sarà:

$$p_{n,s} = \frac{2\,G}{\int_a^b F(x)\, H^2_{n,s}(x)\, d\,x},$$

talchè allora, onde lo sviluppo precedente per la solita funzione $f(x)$ sia possibile nei soliti casi, bisognerà che la serie:

$$(11)\quad \sum_1^\infty \left\{ \frac{H_{n,s}(\alpha)\int_0^t F(\alpha+t) H_{n,s}(\alpha+t)\,dt}{\int_a^b F(x)\, H^2_{n,1}(x)\, d\,x} + \frac{H_{n,2}(\alpha)\int_0^t F(\alpha+t)\, H_{n,2}(\alpha+t)\, dt}{\int_a^b F(x)\, H^2_{n,2}(x)\, dx} + \dots + \frac{H_{n,m}(\alpha)\int_0^t F(\alpha+t)\, H_{n,m}(\alpha+t)\, dt}{\int_a^b F(x)\, H^2_{n,m}(x)\, d\,x} \right\}$$

(cui ora si riduce la (7) divisa per $2\,G$) sia convergente e abbia per somma $\frac{1}{2}$ per t positivo e compreso fra 0 e $b-\alpha$,

e $-\frac{1}{2}$ per t negativo e compreso fra $a-\alpha$ e 0 (0 sempre escl. e gli estremi $\pm(b-a)$ tutt' al più anch' essi escl. nel caso di $\alpha=a$ e $\alpha=b$); e oltre a ciò bisognerà pure che nei soliti intervalli da $a-\alpha$ a $-\varepsilon_1$ e da ε_1 a $b-\alpha$ la derivata $\frac{\partial G_{n,t}}{\partial t}$ della somma $G_{n,t}$ dei primi n termini di questa serie, che ora corrisponde alla funzione $\varphi(t, \alpha, h_n)$, resti sempre numericamente inferiore a un numero finito per qualunque valore di n, e questa somma $G_{n,t}$ o la stessa derivata $\frac{\partial G_{n,t}}{\partial t}$ soddisfino fra $-\varepsilon$ e ε alle solite condizioni dei paragrafi precedenti. E se non sarà soddisfatta la condizione che $\frac{\partial G_{n,t}}{\partial t}$ da $a-\alpha$ a $-\varepsilon_1$ o da ε_1 a $b-\alpha$ resti sempre finita, o si sarà incerti, allora bisognerà al solito che il prodotto $f(\alpha+t)\frac{\partial G_{n,t}}{\partial t}$ soddisfi alla condizione data in fine del §. 58.

Lo sviluppo di $f(x)$ poi in questo caso prenderà la forma:

$$(12) \qquad \sum_1^\infty \left\{ q_{n,1} H_{n,1}(\alpha) + q_{n,2} H_{n,2}(\alpha) + \ldots + q_{n,m} H_{n,m}(\alpha) \right\},$$

con:

$$(13 \qquad q_{n,s} = \frac{\int_a^b f(x) F(x) H_{n,s}(x)\, dx}{\int_a^b F(x) H^2_{n,s}(x)\, dx},$$

e si avrà come abbiamo detto:

$$(14) \quad \varphi(t, \alpha, h_n) = \frac{\partial G_{n,t}}{\partial t} = \sum_1^n{}_r \sum_1^m{}_s \frac{H_{r,s}(\alpha) H_{r,s}(\alpha+t)}{\int_a^b F(x) H^2_{r,s}(x) dx} F(\alpha+t),$$

essendo $G_{n,t}$ la somma dei primi n termini della serie (11).

60. Tutto ciò è generale, nè si esclude che le funzioni $H_{n,s}$ possano variare da un termine all' altro della serie con leggi qualsiansi. Ordinariamente però le funzioni che si corrispondono nei varii termini della serie, cioè le $H_{1,s}, H_{2,s}, \ldots, H_{n,s}, \ldots$, non costituiscono che una sola funzione nella quale oltre ad x figura un'altro parametro λ che varia dall' una all' altra di esse, prendendo però uno stesso valore determinato per es. λ_n nelle m funzioni che figurano nello stesso termine, per modo cioè che si ha:

$$H_{n,1}(x)=H_1(\lambda_n, x), \; H_{n,2}(x)=H_2(\lambda_n, x), \ldots, H_{n,m}=H_m(\lambda_n, x).$$

Allora le serie (9) e (12) che devono servire allo sviluppo della funzione data $f(x)$ si riducono respettivamente alle altre:

$$(15) \quad \frac{1}{2G}\int_a^b f(x)\varphi(x-\alpha, \alpha, h_0)\,dx + \frac{1}{2G}\sum_1^\infty \Big\{ P_{n,1} H_1(\lambda_n, \alpha) + \\ + P_{n,2} H_2(\lambda_n, \alpha) + \ldots + P_{n,m} H_m(\lambda_n, \alpha) \Big\},$$

$$(16) \quad \sum_1^\infty \Big\{ q_{n,1} H_1(\lambda_n, \alpha) + q_{n,2} H_2(\lambda_n, \alpha) + \ldots + q_{n,m} H_m(\lambda_n, \alpha) \Big\},$$

con:

$$(17) \qquad P_{n,s} = p_{n,s}\int_a^b f(x)\,F(x)\,H_s(\lambda_n, x)\,dx,$$

$$(18) \qquad q_{n,s} = \frac{\int_a^b f(x)\,F(x)\,H_s(\lambda_n, x)\,dx}{\int_a^b F(x)\,H_s^2(\lambda_n, x)\,dx},$$

essendo le $p_{n,s}$ quantità costanti da determinarsi; e onde essere sicuri che lo sviluppo (15) è possibile nei soliti casi pei valori di α compresi fra i due numeri dati o da determinarsi a e b,

bisogna poter determinare le costanti $p_{n,s}$ in modo che la serie:

$$(19)\quad \int_0^t \varphi(t, \alpha, h_0)\,dt + \sum_1^\infty \left\{ p_{n,1} H_1(\lambda_n, \alpha) \int_0^t F(\alpha+t) H_1(\lambda_n, \alpha+t)\,dt + \right.$$

$$\left. p_{n,2} H_2(\lambda_n,\alpha) \int_0^t F(\alpha+t) H_2(\lambda_n,\alpha+t)\,dt + .. + p_{n,m} H_m(\lambda_n,\alpha) \int_0^t F(\alpha+t) H_m(\lambda_n,\alpha+t)\,dt \right\}$$

pei valori di t diversi da zero e compresi fra 0 e $b-\alpha$ ($b-\alpha$ al più escl. per $\alpha=a$) sia convergente e abbia per somma una stessa quantità diversa da zero che allora sarà presa per la quantità G che figura nella formola (15) stessa, e pei valori di t diversi da zero e compresi fra $a-\alpha$ e 0 ($a-b$ al più escl. per $\alpha=b$) sia pure convergente ma abbia per somma $-$G, essendo G indipendente da t e da α; mentre onde esser sicuri che lo sviluppo (16) è possibile bisognerà invece che la serie:

$$(20)\quad \sum_1^\infty \left\{ \frac{H_1(\lambda_n, \alpha) \int_0^t F(\alpha+t) H_s(\lambda_n, \alpha+t)\,dt}{\int_a^b F(x) H_1^2(\lambda_n, x)\,dx} + \right.$$

$$\left. \frac{H_2(\lambda_n, \alpha) \int_0^t F(\alpha+t) H_2(\lambda_n, \alpha+t)}{\int_a^b F(x) H_2^2(\lambda_n, x)\,dx} + .. + \frac{H_m(\lambda_n, \alpha) \int_0^t F(\alpha+t) H_m(\lambda_n, \alpha+t)\,dt}{\int_a^b F(x) H^2_m(\lambda_n, x)\,dx} \right\}$$

abbia per somma $\frac{1}{2}$ per t diverso da zero e compreso fra 0 e $b-\alpha$ e abbia per somma $-\frac{1}{2}$ per t diverso da zero e compreso fra $a-\alpha$ e 0, ($b-a$, e $a-b$ al più escl. se $\alpha=a$ o $\alpha=b$), e supposto ben inteso che in quest'ultimo caso si abbia sempre la formola:

$$\int_a^b \mathrm{F}(x)\,\mathrm{H}_s(\lambda_n, x)\,\mathrm{H}_t(\lambda_p, x)\,dx = 0, \tag{21}$$

tutte le volte che non è al tempo stesso $s=t$, $n=p$.

Oltre a ciò poi bisogna sempre che indicando al solito con $\mathrm{G}_{n,t}$ la somma dei primi $n+1$ termini della serie (19) o quella dei primi n della (20), la sua derivata $\frac{\partial \mathrm{G}_{n,t}}{\partial t}$ qualunque sia n resti sempre numericamente inferiore a un numero finito per t compreso nei soliti intervalli da $a-\alpha$ a $-\varepsilon_1$ e da ε_1 a $b-\alpha$ o almeno sia soddisfatta pel prodottc $f(\alpha+t)\frac{\partial \mathrm{G}_{n,t}}{\partial t}$ la condizione posta in fine del §. 58; e bisogna inoltre che la stessa somma $\mathrm{G}_{n,t}$ o la sua derivata $\frac{\partial \mathrm{G}_{n,t}}{\partial t}$ per t compreso fra $-\varepsilon$ e ε soddisfino alle solite condizioni dei paragrafi precedenti.

E quando poi effettuando le integrazioni che figurano in queste formole si troverà per es.

$$\int_0^t \mathrm{F}(\alpha+t)\,\mathrm{H}_s(\lambda_n, \alpha+t)\,dt = k_s(\lambda_n)\left\{\mathrm{K}_s(\lambda_n, \alpha+t) - \mathrm{K}_s(\lambda_n, \alpha)\right\},$$

$$\int_a^b \mathrm{F}(t)\,\mathrm{H}_s^2(\lambda_n, t)\,dt = \theta_s(\lambda_n),$$

ove le k_s e θ_s dipendono soltanto da λ_n, e K_s dipende anche da $\alpha+t$ o da α, allora le serie (19) e (20) diverranno respettivamente le seguenti:

$$\int_0^t \varphi(t,\alpha,h_0)dt + \sum_1^\infty{}_n \sum_1^m{}_s\, p_{n,s}\, k_s(\lambda_n)\mathrm{H}_s(\lambda_n,\alpha)\left\{\mathrm{K}(\lambda_n,\alpha+t) - \mathrm{K}_s(\lambda_n,\alpha)\right\}, \tag{22}$$

$$\sum_1^\infty{}_n \sum_1^m{}_s \frac{k_s(\lambda_n)}{\theta_s(\lambda_n)}\,\mathrm{H}_s(\lambda_n, \alpha)\left\{\mathrm{K}_s(\lambda_n, \alpha+t) - \mathrm{K}_s(\lambda_n, \alpha)\right\}, \tag{23}$$

nella prima delle quali le quantità $k_s(\lambda_n)$ si potranno anche includere nelle costanti $q_{n,s}$; e per queste serie e per le somme $G_{n,t}$ dei loro primi $n+1$ o n termini, come per le derivate di queste somme, dovranno essere soddisfatte le respettive condizioni indicate sopra.

61. I valori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots,$ che prende successivamente il parametro λ nei varii termini delle serie che quì si considerano sono dati ordinariamente come infiniti o parte degli infiniti di una funzione monodroma e continua $w(z)$ di una variabile complessa z, o come radici o parte delle radici della equazione trascendente $\frac{1}{w(z)}=0$, supposti per semplicità questi infiniti o infinitesimi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots,$ tutti di prim'ordine, e reali però o complessi.

Quando poi la funzione $w(z)$ non sia data avanti, ma si sappia che in ogni porzione finita del piano z cade soltanto un numero finito di punti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots,$ allora per un teorema noto (*) potrà sempre costruirsi una funzione di z monodroma e continua in ogni porzione finita del piano z che abbia le quantità $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ per infiniti o infinitesimi del prim' ordine; quindi, ammesso appunto che dei punti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ ne cada soltanto un numero finito in ogni porzione finita del piano z, noi potremo in ogni caso considerarli come infiniti o infinitesimi di prim' ordine, per es. come infiniti, di una funzione monodroma e continua $w(z)$, e potremo quindi introdurre sempre in calcolo questa funzione $w(z)$. Con ciò noi troveremo dei teoremi generali che daranno il modo di determinare infiniti sviluppi per le funzioni di una variabile reale date arbitrariamente fra due limiti; fra i quali sviluppi si trovano appunto quelli interessantissimi che si presentano nella fisica matematica, e pei quali, a quanto sò, non era stata data fin ora una dimostrazione generale e rigorosa.

(*) Il Prof. Betti dette pel primo nelle sue lezioni dell'anno scolastico 1859-60 sulle funzioni ellittiche, il teorema ora ricordato pel caso in cui la distanza fra due qualunque dei punti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n, \ldots,$ non scende mai al disotto di una certa quantità d, e pubblicò questo teorema nel tomo III degli Annali di Matem. del Tortolini. Il sig. Weierstrass poi dette soltanto in questi ultimi anni il teorema stesso pel caso generale, nella sua memoria sulle funzioni analitiche uniformi pubblicata nelle *Abhandlungen* dell'Accademia delle Scienze di Berlino pel 1876.

Però onde giungere a questi teoremi generali, ci è utile premettere delle formole (alcune delle quali io le credo nuove) sulle funzioni monodrome e continue di una variabile complessa.

62. Sia perciò $w(z)$ una funzione di z che è monodroma e continua nell'intorno del punto a, ma diviene infinita di ordine μ in questo punto; e s' indichi con $\varphi(z)$ un altra funzione di z che nell'intorno del punto a, oltre esser monodroma e continua come $w(z)$, è anche finita.

Il prodotto $\varphi(z) w^p(z)(z-a)^{\mu p}$, ove p è un numero intero e positivo, sarà pure monodromo finito e continuo nell'intorno del punto a, e quindi in questo intorno applicando il teorema di Cauchy si troverà;

$$\varphi(z) w^p(z)(z-a)^{\mu p} = \varphi(a) A^p + \left[\varphi(z) w^p(z)(z-a)^{\mu p}\right]'_a (z-a) + \dots + \frac{\left[\varphi(z) w^p(z)(z-a)^{\mu p}\right]_a^{(\mu p-1)}}{\pi(\mu p-1)} (z-a)^{\mu p-1} + \dots,$$

e quindi:

$$\varphi(z) w^p(z) = \frac{\varphi(a) A^p}{(z-a)^{\mu p}} + \frac{\left[\varphi(z) w^p(z)(z-a)^{\mu p}\right]'_a}{(z-a)^{\mu p-1}} + \dots + \frac{\left[\varphi(z) w^p(z)(z-a)^{\mu p}\right]_a^{(\mu p-1)}}{\pi(\mu p-1)(z-a)} + w_1(z),$$

ove A è il limite di $w(z)(z-a)^{\mu}$ per $z=a$, $w_1(z)$ è una funzione monodroma finita e continua nell'intorno del punto a, e il simbolo $\left[\varphi(z) u^p(z)(z-a)^{\mu p}\right]_a^{(s)}$ indica il valore della derivata s^a di $\varphi(z) w^p(z)(z-a)^{\mu p}$ nel punto a.

Integrando dunque lungo una linea chiusa c_a, che si supporrà percorsa nel senso diretto, e dovrà esser presa in modo che non passi per alcun punto d'infinito nè di $\varphi(z)$ nè di $w(z)$, e che oltre al punto a, non racchiuda altri infiniti di queste funzioni, si avrà di quì:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_a}\varphi(z)\,u^p(z)\,dz=\frac{\left[\varphi(z)\,u^p(z)\,(z-a)^{\mu p}\right]_a^{(\mu p-1)}}{\pi(\mu p-1)};$$

quindi se entro certi campi $u(z)$ resta sempre monodroma e continua ma diviene infinita respettivamente degli ordini $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$ nei punti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$, sia che essa diventi o nò infinita anche in altri punti, e se $\varphi(z)$, essendo pure monodroma e continua, non diviene infinita negli stessi punti, indicando con C_n una linea chiusa posta nei detti campi che racchiuda i punti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, e non passi per alcun punto d' infinito nè di $\varphi(z)$ nè di $u(z)$, e indicando con $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{m_n}$ i residui corrispondenti agli altri punti d'infinito di $\varphi(z)u^p(z)$ entro C_n, se pur ve ne sono, si avrà la formola:

$$(24)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\varphi(z)\,u^p(z)\,dz-\sum_1^{m_n}\gamma_r=\sum_1^n\frac{\left[\varphi(z)\,u^p(z)\,(z-\lambda_n)^{\mu_n p}\right]_{\lambda_n}^{(\mu_n p-1)}}{\pi(\mu_n p-1)},$$

ove nella integrazione, ora e in seguito, la linea C_n s' intende percorsa nel senso diretto; e di quì, passando al limite col far crescere C_n indefinitamente, si otterrà subito anche la formola seguente:

$$(25)\qquad \lim\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\varphi(z)\,u^p(z)\,dz-\sum_1^{m_n}\gamma_r\right\}=\sum_1^n\frac{\left[\varphi(z)\,u^p(z)\,(z-\lambda_n)^{\mu_n p}\right]_{\lambda_n}^{(\mu_n p-1)}}{\pi(\mu_n p-1)},$$

che varrà tutte le volte che uno dei due membri di essa abbia un significato.

Son queste le formole che volevamo trovare; e ora è facile vedere che in esse i termini del secondo membro si esprimono tutti pei valori di $\varphi(z)$ e delle sue derivate nei punti corrispondenti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$, e per quelli delle derivate negli stessi punti della funzione $u(z)=\frac{1}{w(z)}$ inversa della funzione data $w(z)$.

Si osservi infatti che se a è un punto d'infinito d'ordine μ di $w(z)$, esso sarà un infinitesimo dello stess' ordine μ di $u(z)$, e quindi $u(z)$ per $z=a$ si annullerà insieme alle sue prime $\mu-1$ derivate, e $u^{(\mu)}(a)$ sarà diversa da zero; talchè applicando il teorema di Cauchy si avrà:

$$w(z)(z-a)^{\mu p}=\left\{\frac{(z-a)^{\mu}}{u(z)}\right\}^{p}=\frac{1}{\left\{\frac{u^{(\mu)}(a)}{\pi(\mu)}+\frac{u^{(\mu+1)}(a)}{\pi(\mu+1)}(z-a)+\ldots\right\}^{p}}, \tag{26}$$

e di qui calcolando le varie derivate di $w^{p}(z)(z-a)^{\mu p}$ e poi facendo $z=a$, si troverà che esse vengono espresse per $u^{(\mu)}(a)$, $u^{(\mu+1)}(a)\ldots$, ciò che dimostra appunto quanto dicevamo poc' anzi (*).

(*) a). Notiamo di passaggio che facendo $p=1$ la (26) ci dà la formola notevole:

$$\lim w(z)(z-a)^{\mu}=A=\frac{\pi(\mu)}{u^{(\mu)}(a)},$$

che determina il coefficiente A di $\frac{1}{(z-a)^{\mu}}$ nello sviluppo di $w(z)$; e questa nel caso particolare di $\mu=1$ dà luogo all'altra $\lim w(z)(z-a)=\frac{1}{u'(a)}$ che potrebbe trovarsi subito anche direttamente, e che ci mostra che « il residuo di una funzione monodro- « ma e continua in un punto a ove essa diviene infinita del prim' ordine è l'inversa « della derivata della funzione inversa ».

b). È pur da notare che supponendo ancora $p=1$ le formole precedenti ci mostrano che se a è un infinito di ordine μ di $w(z)$, il residuo di $w(z)$ in questo punto è $\frac{\left[w(z)(z-a)^{\mu}\right]_a^{(\mu-1)}}{\pi(\mu-1)}$, o il valore per $z=a$ della espressione

$$\frac{1}{\pi(\mu-1)}\frac{d^{\mu-1}}{dz^{\mu-1}}\left\{\frac{u^{(\mu)}(a)}{\pi(\mu)}+\frac{u^{(\mu+1)}(a)}{\pi(\mu+1)}(z-a)+\ldots\right\}^{-p},$$

per modo che questo residuo si esprime sempre per le derivate di ordine μ, $\mu+1\ldots$ della funzione inversa $u(z)$ di $w(z)$ prese nel punto a.

c). Noteremo inoltre che cambiando $\varphi(z)$ in $\frac{\varphi(z)}{z-z'}$, e intendendo che la nuova funzione $\varphi(z)$ sia ancora monodroma e continua entro C_n e le γ_r siano ora i residui di $\varphi(z)w^{p}(z)$ nei punti d'infinito $\alpha_1, \alpha_2\ldots$ di questa funzione diversi da $\lambda_1, \lambda_2,\ldots,\lambda_{n'}$,

63. In particolare dunque, supponendo che gli infiniti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ siano tutti del prim' ordine, e facendo $p=1$, e $=2$ coll' osservare che $\frac{1}{u'(\lambda_n)}$ è appunto il residuo c_n di $u(z)$ nel punto λ_n si ottengono le formole seguenti:

$$(27) \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_n} \varphi(z)\, u(z)\, dz - \sum_1^{m_n} \gamma_r = \sum_1^n c_n \varphi(\lambda_n) = \sum_1^n \frac{\varphi(\lambda_n)}{u'(\lambda_n)}, \\ \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_n} \varphi(z)\, u^2(z)\, dz - \sum_1^{m_n} \gamma_r = \sum_1^n \left\{ \frac{\varphi'(\lambda_n)}{u'(\lambda_n)^2} - \frac{\varphi(\lambda_n) u''(\lambda_n)}{u'(\lambda_n)^3} \right\}, \end{cases}$$

le quali danno luogo alle altre ai limiti:

$$(28) \begin{cases} \lim \left\{ \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_n} \varphi(z)\, u(z)\, dz - \sum_1^{m_n} \gamma_r \right\} = \sum_1^\infty c_n \varphi(\lambda_n) = \sum_1^\infty \frac{\varphi(\lambda_n)}{u'(\lambda_n)}, \\ \lim \left\{ \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_n} \varphi(z) u^2(z) dz - \sum_1^{m_n} \gamma_r \right\} = \sum_1^\infty \left\{ \frac{\varphi'(\lambda_n)}{u'(\lambda_n)^2} - \frac{\varphi(\lambda_n)\, u''(\lambda_n)}{u'(\lambda_n)^3} \right\}, \end{cases}$$

che saremo sicuri che sussistono appena si riscontri che uno dei due membri ha un significato determinato.

La seconda delle (27) poi cambiandovi $\varphi(z)$ in $\varphi(z)\psi(z)$, si trasforma nell' altra:

e z' non sia un punto d' infinito nè di $\varphi(z)$ nè di $w(z)$, basta osservare che la somma precedente $\sum_1^{m_n} \gamma_r$ conterrà anche il termine $\varphi(z')\, w^p(z')$ per ottenere subito dalla (25) la formola seguente:

$$\varphi(z')\, w^p(z') = \sum_1^\infty \frac{1}{\pi(\mu_n p - 1)} \left[\frac{\varphi(z)\, w^p(z)\, (z-\lambda_n)^{\mu_n p}}{z'-z} \right]_{\lambda_n}^{(\mu_n p - 1)} +$$

$$+ \lim \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{\varphi(z)\, w^p(z)\, dz}{z-z'} - \sum_1^{m_n} \frac{\gamma_r}{\alpha_r - z'} \right\},$$

che saremo sicuri che sussiste appena si riscontri che uno dei termini del secondo membro ha un significato, e servirà perciò in tal caso a dare uno sviluppo di $\varphi(z)\, w^p(z)$.

S'intende bene come queste osservazioni possano riescire utilissime nella teorica delle funzioni di una variabile complessa.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\varphi(z)\,\psi(z)\,u^2(z)\,dz-\sum_1^{m_n}\gamma_r=\sum_1^n\left\{\frac{\varphi'(\lambda_n)\,\psi(\lambda_n)}{u'(\lambda_n)^2}+\right.$$

$$\left.+\varphi(\lambda_n)\frac{\psi'(\lambda_n)u'(\lambda_n)-\psi(\lambda_n)\,u''(\lambda_n)}{u'(\lambda_n)^3}\right\};$$

e questa vale qualunque siano le funzioni $\varphi(z)$ e $\psi(z)$, purchè siano monodrome e continue, e esse o almeno il loro prodotto non divenga infinito nei punti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$; e continua a valere anche al limite quando si riscontri che uno dei suoi membri conserva un significato determinato.

Nell' ipotesi dunque che la funzione $\psi(z)$ soddisfi anche alla condizione $\psi'(\lambda_n)\,u'(\lambda_n)-\psi(\lambda_n)\,u''(\lambda_n)=0$, la formola precedente dà luogo alle due:

$$(29)\quad\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_n}\varphi(z)\,\psi(z)\,u^2(z)\,dz-\sum_1^{m_n}\gamma_r=\sum_1^n\frac{\varphi'(\lambda_n)\psi(\lambda_n)}{u'(\lambda_n)^2}\,,\\[2ex]\lim\left\{\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_n}\varphi(z)\,\psi(z)\,u^2(z)\,dz-\sum_1^{m_n}\gamma_r\right\}=\sum_1^{\infty}\frac{\varphi'(\lambda_n)\,\psi(\lambda_n)}{u'(\lambda_n)^2}\,,\end{cases}$$

delle quali la seconda non può assicurarsi che sussista altro che quando si riscontra che uno dei due membri ha un significato determinato; e poichè si soddisfa alla condizione che si ha per $\psi(z)$ prendendo $\psi(z)=\pi(z)\,u'(z)$, ove $\pi(z)$ è una funzione che è monodroma al solito e continua, e la cui derivata è nulla nei punti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ si hanno anche le formole seguenti:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\varphi(z)\,\pi(z)\,u'(z)\,dz-\sum_1^{m_n}\gamma_r=-\sum_1^n\frac{\varphi'(\lambda_n)\,\pi(\lambda_n)}{u'(\lambda_n)}=$$

$$=\sum_1^n\varphi'(\lambda_n)\,\pi(\lambda_n)\left[\frac{u^2(z)}{u'(z)}\right]_{\lambda_n},$$

$$\lim\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\varphi(z)\,\pi(z)\,u'(z)\,dz-\sum_1^{m_n}\gamma_r\right\}=-\sum_1^{\infty}\frac{\varphi'(\lambda_n)\,\pi(\lambda_n)}{u'(\lambda_n)}=$$

$$=\sum_1^{\infty}\varphi'(\lambda_n)\,\pi(\lambda_n)\left[\frac{u^2(z)}{u'(z)}\right]_{\lambda_n},$$

la seconda delle quali sussiste soltanto quando si riscontri che uno dei suoi membri ha un significato determinato; e in queste le γ_r sono i residui della funzione $\varphi(z)\,\pi(z)\,u'(z)$ nei suoi punti d' infinito diversi da $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n, ..$, e $\varphi(z)$ e $\pi(z)$ sono funzioni di z monodrome e continue che non divengono infinite in questi punti, e la seconda delle quali gode della proprietà che la sua derivata $\pi'(z)$ è zero nei punti stessi $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n, ..$, per modo che se $u(z$ è sempre finita entro C_n, o diviene infinita soltanto di ordine superiore al primo coi residui uguali a zero, indicando con $\chi(z)$ una funzione sempre monodroma finita e continua, si potrà prendere $\pi'(z) = \chi(z)\,u(z)$, ovvero $\pi(z) = \int \chi(z)\,u(z)\,dz$, giacchè l' integrale $\int \chi(z)\,u(z)\,dz$ verrà ad essere monodromo e continuo, ec. . . . .

Prendendo $\pi(z) = 1$, le formole precedenti danno luogo alle altre notevoli:

$$(29)^{bis} \quad \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_n} \dfrac{\varphi(z)\,u'(z)}{u^2(z)}\,dz - \sum_1^{m_n} \gamma_r = \sum_1^{n} \dfrac{\varphi'(\lambda_n)}{u'(\lambda_n)}, \\ \lim \left\{ \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_n} \dfrac{\varphi(z)\,u'(z)}{u^2(z)}\,dz - \sum_1^{m_n} \gamma_r \right\} = \sum_1^{\infty} \dfrac{\varphi'(\lambda_n)}{u'(\lambda_n)}, \end{cases}$$

nelle quali $u(z)$ e $\varphi(z)$ sono funzioni di z monodrome e continue la prima delle quali ammette gli infinitesimi di prim' ordine $\lambda_1, \lambda_2, . . ., \lambda_n, . .$; le γ_r sono i residui di $\dfrac{\varphi(z)\,u'(z)}{u^2(z)}$ nei suoi punti d'infinito diversi da $\lambda_1, \lambda_2, . . .$, che cadono entro C_n, e C_n è una linea chiusa sulla quale non cadono infiniti della funzione $\dfrac{\varphi(z)\,u'(z)}{u^2(z)}$.

Formole analoghe si avrebbero facendo $p=3, 4, ..$ nelle (24) e (25) (*).

(*) Facendo una breve digressione, mi permetto di notare che le formole trovate possono riuscire utili anche per la ricerca della somma delle serie; poichè quando è data una

64. Ciò premesso, torniamo a considerare le serie del §. 60, supponendo appunto che in esse le quantità $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ siano infiniti di prim' ordine di una funzione $w(z)$ monodroma e continua a distanza finita in campi che contengono i punti

serie $\sum_1^\infty \theta_n$, determinando le funzioni $\varphi(z), \psi(z)$, e $w(z)$ o $u(z)$ in modo che il termine che figura nelle somme dei secondi membri delle formole stesse, o la riunione di alcuni di questi termini sia uguale a θ_n, la questione della ricerca della somma delle serie $\sum_1^\infty \theta_n$ si ridurrà a quella della determinazione del limite della differenza che figura nei primi membri, e questo in certi casi potrà presentare minori difficoltà.

Ciò apparisce chiaro dai seguenti esempii.

1.° Vogliasi la somma della serie $\sum_1^\infty \frac{\operatorname{sen} n\alpha \operatorname{sen} nx}{n^2-\gamma^2}$, ove γ è reale o complesso senza essere però un numero intero, e α e x sono numeri reali e positivi compresi fra 0 e π.

Supponendo in primo luogo γ diverso da zero, si osserverà che preso $\varphi(z) = \frac{\operatorname{sen} \alpha z \operatorname{sen} xz}{2\gamma(z-\gamma)}$, $w(z) = \cot \pi z$, o $u(z) = \operatorname{tg} \pi z$, la somma dei due termini $\frac{\varphi(\lambda_n)}{u'(\lambda_n)}$ che corrispondono a $\lambda_n = -n$ e $\lambda_n = n$ $(n > 0)$ dà appunto $\frac{\operatorname{sen} n\alpha \operatorname{sen} nx}{n^2-\gamma^2}$; e quindi, prendendo per C_n un rettangolo coi lati paralleli agli assi x e y simmetrico intorno all'origine e che non passi pei punti $z = \pm n\pi$, e servendosi della prima delle (28) con osservare che in questo caso le quantità γ_r si riducono a quella che corrisponde a $z=\gamma$, e che è uguale a $\frac{\operatorname{sen} \alpha\gamma \operatorname{sen} x\gamma \cot \pi\gamma}{2\gamma}$, si troverà subito;

$$\sum_1^\infty \frac{\operatorname{sen} n\alpha \operatorname{sen} nx}{n^2-\gamma^2} = -\frac{\operatorname{sen} \alpha\gamma \operatorname{sen} x\gamma \cot \pi\gamma}{2\gamma} + \lim \frac{1}{4\pi\gamma i} \int \frac{\operatorname{sen} \alpha z \operatorname{sen} xz \cot \pi z}{(z-\gamma) \operatorname{sen} \pi z} dz,$$

ove l'integrale è esteso al rettangolo indicato; e quindi la nostra ricerca sarà ridotta a quella del limite dell'integrale del secondo membro.

Ma essendo:

$$\operatorname{sen} \alpha z \cos \pi z = -\operatorname{sen} (\pi-\alpha)z + \cos \alpha z \operatorname{sen} \pi z,$$

il medesimo integrale si riduce alla somma:

$$-\int \frac{\operatorname{sen} xz \operatorname{sen} (\pi-\alpha) z}{(z-\gamma) \operatorname{sen} \pi z} dz + \int \frac{\operatorname{sen} xz \cos \alpha z}{z-\gamma} dz,$$

e poichè la funzione $\frac{\operatorname{sen} xz \cos \alpha z}{z-\gamma}$ diviene infinita entro il rettangolo soltanto nel punto $z=\gamma$ col residuo $\operatorname{sen} x\gamma \cos \alpha\gamma$, il secondo di questi integrali sarà uguale a $2\pi i \operatorname{sen} x\gamma \cos \alpha\gamma$; quindi sostituendo e riducendo si avrà:

$$\sum_1^\infty \frac{\operatorname{sen} n\alpha \operatorname{sen} nx}{n^2-\gamma^2} = \frac{\operatorname{sen} x\gamma \operatorname{sen} (\pi-\alpha)\gamma}{2\gamma \operatorname{sen} \pi\gamma} - \lim \frac{1}{4\pi\gamma i} \int \frac{\operatorname{sen} xz \operatorname{sen} (\pi-\alpha)z}{(z-\gamma) \operatorname{sen} \pi z} dz.$$

Ora avendosi:

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$; e, ponendoci dapprima nel caso più generale della serie (15), cerchiamo di soddisfare alle condizioni che allora si hanno per le serie (19) e (22) e per la somma $G_{n,t}$ dei loro primi n termini.

$$2 \operatorname{sen} x z \operatorname{sen} (\pi - \alpha) z = \cos [\pi - (x + \alpha)] z + \cos [\pi - (\alpha - x)] z,$$

se poniamo nell'integrale invece dei seni e coseni le loro espressioni per esponenziali, e osserviamo che $x + \alpha$ non arriva a 2π, si vede subito che quando $\alpha > x$ le porzioni dell'ultimo integrale che sono estese ai lati orizzontali tendono a zero coll'allontanarsi di questi lati dall'asse delle x, e quelle estese ai lati verticali si mantengono sempre finite e tendono a venire eguali e di segno contrario; e questo porta intanto a concludere che se $x < \alpha$ si ha:

$$\sum_1^\infty \frac{\operatorname{sen} n \alpha \operatorname{sen} n x}{n^2 - \gamma^2} = \frac{\operatorname{sen} x \gamma \operatorname{sen} (\pi - \alpha) \gamma}{2 \gamma \operatorname{sen} \pi \gamma};$$

e questa formola, a causa della convergenza in uguale grado, e quindi della continuità della serie del primo membro, vale anche per $x = \alpha$.

Cangiando ora x in α, e α in x si trova che per $x > \alpha$ si ha:

$$\sum_1^\infty \frac{\operatorname{sen} n \alpha \operatorname{sen} n x}{n^2 - \gamma^2} = \frac{\operatorname{sen} \alpha \gamma \operatorname{sen} (\pi - x) \gamma}{2 \gamma \operatorname{sen} \pi \gamma};$$

e si conclude quindi che la somma della serie data $\sum_1^\infty \frac{\operatorname{sen} n \alpha \operatorname{sen} n x}{n^2 - \gamma^2}$ per $x \leq \alpha$ è $\frac{\operatorname{sen} x \gamma \operatorname{sen} (\pi - \alpha) \gamma}{2 \gamma \operatorname{sen} \pi \gamma}$, e per $x \geq \alpha$ è $\frac{\operatorname{sen} \alpha \gamma \operatorname{sen} (\pi - x) \gamma}{2 \gamma \operatorname{sen} \pi \gamma}$ quando γ è reale o complesso essendo però diverso da zero e non intero, e α e x sono compresi fra 0 e π (0 e π evid. incl.).

Osservando poi che per γ compreso fra -1 e 1 (± 1 escl.) la serie data e le somme trovate, considerate anche come funzioni di γ, sono finite e continue, si vede subito che la serie $\sum_1^\infty \frac{\operatorname{sen} n \alpha \operatorname{sen} n x}{n^2}$ per $x \leq \alpha$ è uguale a $\frac{x(\pi - \alpha)}{2\pi}$, e per $x \geq \alpha$ è uguale a $\frac{\alpha(\pi - x)}{2\pi}$, e così la somma della serie data resta determinata in termini finiti per tutti i valori di γ diversi dai numeri interi $\pm 1, \pm 2, \ldots$; e questa somma ha una particolarità notevole, quale è quella di avere due espressioni analitiche distiute per gli indicati valori di x e di α.

2.° Vogliasi la somma della serie $\sum_1^\infty \frac{\cos \lambda_n x}{\lambda_n \operatorname{sen} \lambda_n \pi}$ per x fra $-\pi$ e π ($\pm \pi$ escl.), ove le $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ sono le radici positive della equazione $\operatorname{sen} \pi z - \pi z \cos \pi z = 0$, le quali evidentemente col crescere sempre più di n non sono numeri interi, ma tendono invece verso i numeri della forma $\frac{2n+1}{2}$.

Per servirsi ora della seconda delle $(29)^{\text{bis}}$, si prenderà $u(z) = \operatorname{sen} \pi z - \pi z \cos \pi z$, $u'(z) = \pi^2 z \operatorname{sen} \pi z$, e poi si determinerà il $\varphi(z)$ colla condizione che sia $\frac{\varphi'(\lambda_n)}{u'(\lambda_n)} = \frac{\cos \lambda_n x}{\lambda_n \operatorname{sen} \lambda_n \pi}$; talchè basterà prendere $\varphi'(z) = \pi^2 \cos z x$, o $\varphi(z) = \frac{\pi^2 \operatorname{sen} z x}{x}$ per x diverso da zero, e $\varphi(z) = \pi^2$ per $x = 0$.

Ci serviremo per questo delle formole che abbiamo scritte sopra:

$$(30)\ \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_n}\varphi(z)\,u(z)\,dz - \sum_1^{m_n}\gamma_r = \sum_1^n c_n\varphi(\lambda_n) = \sum_1^n \dfrac{\varphi(\lambda_n)}{u'(\lambda_n)}, \\ \lim\left\{\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_n}\varphi(z)\,u(z)\,dz - \sum_1^{m_n}\gamma_r\right\} = \sum_1^\infty c_n\,\varphi(\lambda_n) = \sum_1^\infty \dfrac{\varphi(\lambda_n)}{u'(\lambda_n)}, \end{cases}$$

Si avrà così dalla formola citata per x diverso da zero:

$$\sum_1^\infty \frac{\cos\lambda_n x}{\lambda_n \operatorname{sen}\lambda_n\pi} = \lim \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} \frac{\pi^4 z \operatorname{sen} xz \operatorname{sen}\pi z}{x(\operatorname{sen}\pi z - z\cos\pi z)^2}\,dz,$$

quando si prenda per C_n per es. un rettangolo di cui un lato sia sull'asse delle y, quello parallelo passi pel punto $x=n$, e gli altri due siano a distanza grande quanto si vuole dall'asse delle x, e s'intenda escluso con un piccolo semicerchio il punto $z=0$, perchè in esso la funzione sotto l'integrale diviene infinita del terz'ordine con un residuo che si trova facilmente essere uguale a $\frac{3}{10}\pi - \frac{3}{2}\frac{x^2}{\pi}$,

Ora l'integrale esteso al lato che è sull'asse delle y è zero identicamente perchè la funzione sotto il segno è dispari; quello esteso al semicerchio divisa per $2\pi i$ è la metà del residuo preso col segno cambiato (perchè il semicerchio viene percorso in senso inverso) e quindi è uguale a $\frac{3}{4}\frac{x^2}{\pi} - \frac{3}{20}\pi$; gli integrali estesi ai lati orizzontali per x fra $-\pi$ e π ($\pm\pi$ escl.) coll'allontanarsi sempre più di questi lati dall'asse delle x tendono a zero, e al tempo stesso l'integrale esteso all'altro lato verticale su cui $z=n+iy$, si mantiene sempre finito; dunque sarà evidentemente:

$$\sum_1^\infty \frac{\cos\lambda_n x}{\lambda_n \operatorname{sen}\lambda_n\pi} = \frac{3}{4}\frac{x^2}{\pi} - \frac{3}{20}\pi + \lim_{n=\infty}\frac{\pi}{2x}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\pi^2 z \operatorname{sen} xz \operatorname{sen}\pi z}{(\operatorname{sen}\pi z - z\cos\pi z)^2}\,dy,$$

intendendo che nell'integrale del secondo membro sia $z=n+iy$.

Ma eseguendo una integrazione per parti col prendere $\operatorname{sen} xz$ per fattore finito, si vede subito che la quantità di cui deve cercarsi il limite equivale all'altra:

$$\frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos xz}{\operatorname{sen}\pi z - \pi z\cos\pi z}\,dy - \frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x(n+iy)}{\cosh \pi y}\,\frac{dy}{\pm n\pi \pm i\pi y \mp i \operatorname{tgh}\pi y},$$

ove deve prendersi il segno $+$ o $-$ secondochè n è pari o dispari; dunque poichè questa per n crescente all'infinito ha per limite zero, si conclude ora senz'altro che per x diverso da zero e compreso fra $-\pi$ e π ($\pm\pi$ escl.) la somma cercata della serie $\sum_1^\infty \frac{\cos\lambda_n x}{\lambda_n \operatorname{sen}\lambda_n\pi}$ è $\frac{3}{4}\frac{x^2}{\pi} - \frac{3}{20}\pi$.

Se poi $x=0$, allora prendendo $\varphi(z) = \pi^2 z$, si trova:

$$\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_n \operatorname{sen}\lambda_n\pi} = \lim \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{\pi^4 z^2 \operatorname{sen}\pi z}{(\operatorname{sen}\pi z - \pi z\cos\pi z)^2}\,dz$$

che danno il modo di esaminare la somma dei primi n termini della serie $\sum_1^\infty c_n \varphi(\lambda_n)$, e questa serie stessa, o le due formate dalle parti reali e dai coefficienti dell' immaginario dei singoli termini; e profittando della tanta arbitrarietà che si ha in $\varphi(z)$, e limitandoci a scrivere le formole relative alla serie (19), giacchè per passare poi a quelle relative alla (22) basterà porre invece di $\int_0^t F(\alpha+t)\, H_s(z, \alpha+t)\, dt$ il valore corrispondente $k_s(z) \{K_s(z, \alpha+t) - K_s(z, \alpha)\}$, procureremo di ridurre il secondo membro della seconda di queste formole (30) alla parte:

$$\sum_1^\infty {}_n \sum_1^m {}_s\, p_{n,s}\, H_s(\lambda_n, \alpha) \int_0^t F(\alpha+t)\, H_s(\lambda_n, \alpha+t) dt$$

della espressione (19), coll' ammettere però che le funzioni $H_s(z,\alpha) \int_0^t F(\alpha+t)\, H_s(z,\alpha+t)\, dt$ pei varii valori di α e t che devono considerarsi siano funzioni di z monodrome e continue ove lo è $w(z)$, e non divengano infinite nè complesse nei punti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$

Per questo, gioverà evidentemente di prendere:

$$\varphi(z) = \sum_1^m \varphi_s(z)\, H_s(z, \alpha) \int_0^t F(\alpha+t)\, H_s(z, \alpha+t)\, dt\,,$$

e osservando che il residuo per $z=0$ della funzione sotto l'integrale è $\frac{3}{10}\pi$, e procedendo come nel caso precedente, si trova che la somma delle serie $\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_n \operatorname{sen} \lambda_n \pi}$ è $-\frac{3}{20}\pi$; talchè si può dire che per x fra $-\pi$ e π ($\pm\pi$ escl.) si ha sempre la formola:

$$\sum_1^\infty \frac{\cos \lambda_n x}{\lambda_n \operatorname{sen} \lambda_n \pi} = \frac{3}{4}\frac{x^2}{\pi} - \frac{3}{20}\pi\,.$$

quando le quantità $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ sono le radici reali e positive della equazione $\operatorname{sen} \pi z - \pi z \cos \pi z = 0$.

ove le $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, .., $\varphi_m(z)$ sono m funzioni di z da determinarsi, monodrome e continue come $w(z)$, che possono anche essere tutte eguali fra loro, e anche essere tutte costanti; e oltre non divenire infinite nei punti $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n, ..$, devono esser tali che la funzione $\varphi(z)$ non divenga infinitesima in questi punti, o almeno vi deve essere una classe di un numero infinito dei punti stessi che non sono infinitesimi di $\varphi(z)$ per nessuno dei valori di α e di t che occorre di considerare.

Ora con questo valore di $\varphi(z)$ la prima delle formole (30) diviene:

$$(31) \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} w(z)dz \sum_1^m {}_s \varphi_s(z) H_s(z,\alpha) \int_0^t F(\alpha+t)\, H_s(z, \alpha+t)dt - \sum_1^{m_n}\gamma_r =$$
$$= \sum_1^n {}_r \sum_1^m {}_s c_r\, \varphi_s(\lambda_r)\, H_s(\lambda_r,\alpha) \int_0^t F(\alpha+t)\, H_s(\lambda_r, \alpha+t)\, dt,$$

ove le $\gamma_1, \gamma_2, .., \gamma_{m_n}$ sono i residui della funzione sotto il segno integrale corrispondenti ai punti d'infinito diversi da $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n$ (se ve ne sono) che cadono entro C_n; e quindi, separando in questa equazione la parte reale dalla parte immaginaria, s' intende subito che se avverrà che per α compreso fra certi numeri a e b dati o da determinarsi convenientemente, e per t diverso da zero e compreso fra 0 e $b-\alpha$ ($b-a$ al più escl. per $\alpha=a$) la parte reale della quantità:

$$(32) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} w(z)\, dz \sum_1^m \varphi_s(z)\, H_s(z,\alpha) \int_0^t F(\alpha+t)\, H_s(z,\alpha+t)dt - \sum_1^{m_n}\gamma_r$$

abbia un limite determinato e finito $\chi(\alpha,t)$ che come funzione di t fra gli stessi limiti 0, e $b-\alpha$ (0 escl. ec.) è una funzione finita e continua che ammette una derivata parziale $\frac{\partial \chi}{\partial t}$ finita e atta alla integrazione da 0 a $b-\alpha$, e se lo stesso accadrà per t compreso fra $a-\alpha$ e 0 (0 escl. ec.), allora indicando in generale col simbolo $[a]_0$ la parte reale della quantità a, si avrà la formola seguente:

$$\chi(\alpha, \pm 0) = -\int_0^t \frac{\partial \chi}{\partial t} dt + \sum_1^{\infty}{}_n \sum_1^m{}_s [c_n \varphi_s(\lambda_n)]_0 \, H_s(\lambda_n, \alpha) \int_0^t F(\alpha+t) \, H_s(\lambda_n, \alpha+t) \, d\,t,$$

che varrà per t diverso da zero e compreso fra 0 e $b-\alpha$ o fra $a-\alpha$ e 0 (gli estremi $\pm(b-a)$ al più escl. per $\alpha=a$ o $\alpha=b$), e intendendo che in $\chi(\alpha,\pm 0)$ debba prendersi il segno $+$ o il segno $-$ secondochè t è positivo o negativo; e in queste formole $\frac{\partial \chi}{\partial t}$ potrà anche essere discontinua o infinita per $t=0$.

Di quì apparisce che se la funzione $\chi(\alpha,t)$ sarà discontinua per $t=0$ per modo che $\chi(\alpha, +0)$ e $\chi(\alpha, -0)$ siano diverse da zero e siano uguali e di segno contrario e indipendenti da α, rimarrà intanto soddisfatta la condizione relativa alla convergenza e alla somma della serie (19) quando si prenda $\varphi(t, \alpha, h_0) = -\frac{\partial \chi}{\partial t}, p_{n,s} = [\, c_n \varphi_s(\lambda_n)\,]_0$, e conseguentemente $G = \chi(\alpha, +0)$.

Colle notazioni precedenti poi si verrà ad avere:

$$G_{n,t} = -\int_0^t \frac{\partial \chi}{\partial t} dt + \sum_1^n{}_r \sum_1^m{}_s [c_r \varphi_s(\lambda_r)]_0 \, H_s(\lambda_r, \alpha) \int_0^t F(\alpha+t) \, H_s(\lambda_r, \alpha+t) \, d\,t =$$

$$= -\int_0^t \frac{\partial \chi}{\partial t} dt + \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} w(z) \, d\,z \sum_1^m \varphi_s(z) \, H_s(z, \alpha) \int_0^t F(\alpha+t) \, H_s(z, \alpha+t) \, dt - \sum_1^{m_n} \gamma_r \right\},$$

$$\frac{\partial G_{n,t}}{\partial t} = \varphi(t, \alpha, h_n) = -\frac{\partial \chi}{\partial t} + \sum_1^n{}_r \sum_1^m{}_s [c_r \varphi_s(\lambda_r)]_0 \, H_s(\lambda_r, \alpha) \, H_s(\lambda_r, \alpha+t) \, F(\alpha+t) =$$

$$= -\frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} w(z) \, d\,z \sum_1^m \varphi_s(z) \, H_s(z,\alpha) \int_0^t F(\alpha\, t) \, H_s(z, \alpha+t) dt - \sum_1^{m_n} \gamma_r \right\};$$

e se ε_1 è un numero positivo piccolissimo, per t compreso fra $a-\alpha$ e $-\varepsilon_1$ e fra ε_1 e $b-\alpha$ ($\alpha=a$ o $\alpha=b$ al più escl.)

questa quantità $\frac{\partial G_{n,t}}{\partial t}$, o (il che è lo stesso) la derivata rispetto a t della parte reale della espressione (32), dovrà restare numericamente inferiore a un numero finito qualunque sia n; e quando queste condizioni siano soddisfatte, allora per concludere che lo sviluppo (15) è applicabile alla funzione $f(x)$ nei soliti casi basterà vedere se la somma $G_{n,t}$ o la sua derivata $\frac{\partial G_{n,t}}{\partial t}$ per t fra $-\varepsilon$ e ε soddisfa alle solite condizioni dei paragrafi precedenti; e in particolare quando (limitandosi a considerare $f(x)$ nei punti α negli intorni dei quali essa non fà infinite oscillazioni o ha una derivata che resta atta alla integrazione anche ridotta ai valori assoluti) si richiederà soltanto che $G_{n,t}$ debba essere sempre finito fra $-\varepsilon$ e ε, allora basterà verificare questo per la solita parte reale della espressione (32).

E se avverrà che per un numero finito di valori di t fra $a-\alpha$ e $-\varepsilon_1$ o fra ε_1 e $b-\alpha$ non sia soddisfatta la condizione che $\frac{\partial G_{n,t}}{\partial t}$ resti numericamente inferiore a un numero finito qualunque sia n, o si sarà incerti, allora bisognerà che la funzione $f(x)$ sia tale che l'integrale del prodotto $f(\alpha+t)\,\frac{\partial G_{n,t}}{\partial t}$, o quello del prodotto di $f(\alpha+t)$ per la derivata rispetto a t della parte reale della espressione (32), esteso a intorni sufficientemente piccoli degli stessi punti la cui ampiezza non dipenda da n, sia numericamente inferiore a quel numero che più ci piace qualunque sia n. e ciò anche riducendo il prodotto medesimo ai suoi valori assoluti (§. 57); e quando questa condizione si trovi soddisfatta non occorrerà fare le altre verificazioni su $G_{n,t}$ pei valori eccezionali di t ora indicati.

Gli stessi risultati si hanno se, invece che per la parte reale della espressione (32), le condizioni qui indicate si verificano pel coefficiente dell'immaginario, intendendo però allora che il simbolo $[a]_0$ indichi il coefficiente dell'immaginario di a; quindi si ha così un teorema generale che, sebbene di un enun-

ciato assai complicato per le varie condizioni che porta, e per la generalità che voglio ancora conservare, mi sembra però di molta importanza, come apparirà chiaro anche dall'applicazioni che poi ne farò; e questo teorema è il seguente: „ Se pei „ valori di x in un conveniente intervallo dato o da determinarsi (a, b) le m funzioni $H_1(z, x)$, $H_2(z, x)$,.., $H_m(z, x)$ „ sono anche funzioni monodrome e continue della variabile „ complessa z in campi che contengono i punti indici delle „ quantità reali o complesse $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n, ..$, nei quali punti „ le funzioni stesse $H_1, H_2, .., H_m$ hanno valori reali; e se queste „ quantità $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n, ..$ sono date come infiniti o parte degli „ infiniti di prim'ordine di una funzione pur monodroma e continua negli stessi campi $w(z)$, o come radici o parte delle „ radici della equazione trascendente $\frac{1}{w(z)}=0$, o almeno sono „ quantità tali che con esse, sole o insieme ad altre, si possa „ costruire una tal funzione $w(z)$ che le abbia per infiniti di „ prim' ordine; allora, una funzione $f(x)$ della variabile x, data „ arbitrariamente nell'intervallo (a, b) potrà svilupparsi nei „ soliti casi pei punti α di questo intervallo in serie della „ forma:

$$\frac{1}{2G}\int_a^b f(x)\,\varphi(x-\alpha, \alpha, h_0)\,dx + \tag{33}$$

$$+\frac{1}{2G}\sum_1^\infty \left\{ P_{n,1} H_1(\lambda_n,\alpha) + P_{n,2} H_2(\lambda_n,\alpha) + \ldots + P_{n,m} H_m(\lambda_n,\alpha) \right\}$$

„ con

$$P_{n,s} = p_{n,s}\int_a^b f(x)\,F(x)\,H_s(\lambda_n,x)\,dx, \tag{34}$$

„ essendo G e $p_{n,s}$ costanti determinate, e $F(x)$ una funzione „ reale e conveniente di x; e ciò tutte le volte che riescano „ soddisfatte le condizioni seguenti:

1.º „che si possano trovare m funzioni di z $\varphi_1(z), \varphi_2(z), .., \varphi_m(z)$
„ tali che la funzione:

$$\varphi(z) = \sum_1^m \varphi_s(z) \, H_s(z, \alpha) \int_0^t F(\alpha + t) \, H_s(z, \alpha + t) \, dt$$

„ risulti monodroma e continua nei soliti campi suindicati, e
„ che al tempo stesso indicando con $\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_{m_n}, \ldots$ i residui
„ della funzione $\varphi(z) \, w(z)$ nei suoi punti d' infinito $\nu_1, \nu_2, .., \nu_{m_n}, ..$
„ diversi da $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_n, ..$, e descrivendo una linea chiusa C_n
„ entro gli stessi campi che non passi per alcun punto d'infinito
„ della medesima funzione $\varphi(z) \, w(z)$ ma contenga nel suo interno
„ i punti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ e tutt' al più anche gli altri punti
„ $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{m_n}$, si trovi che la parte reale (o il coefficiente
„ dell' immaginario) della quantità:

$$(35) \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \varphi(z) \, w(z) \, dz - \sum_1^{m_n} \gamma_r =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} w(z) \, dz \sum_1^m \varphi(z) \, H_s(z, \alpha) \int_0^t F(\alpha + t) H_s(z, \alpha + t) dt - \sum_1^{m_n} \gamma_r$$

„ pei valori di t compresi nei soliti intervalli $(a - \alpha, -\varepsilon_1)$,
„ $(\varepsilon_1, b - \alpha)$ abbia una derivata il cui valore assoluto è infe-
„ riore a un certo numero finito, qualunque sia l' ampiezza
„ della linea C_n; e di più, col crescere indefinito di C_n la
„ parte reale (o il coefficiente dell'immaginario) della quantità
„ stessa (35) pei valori di α fra a e b (a e b al più escl.) e
„ pei valori di t fra $a - \alpha$ e $b - \alpha$ abbia per limite una fun-
„ zione $\chi(\alpha, t)$ che, oltre essere finita e continua per tutti i
„ valori di t fuorchè per $t = 0$, ammetta pei valori di t diversi
„ da zero una derivata determinata $\frac{\partial \chi}{\partial t}$ finita e atta alla inte-
„ grazione fra 0 e $b - \alpha$ e fra $a - \alpha$ e 0, e sia tale altresì che le
„ due quantità $\chi(\alpha, +0)$, $\chi(\alpha, -0)$ siano diverse da zero uguali
„ e di segno contrario e indipendenti da α.

2.° „ che pei valori di t fra $-\varepsilon$ e ε la quantità che ora „ corrisponde alla $G_{n,t}$:

$$-\int_0^t \frac{d\chi}{dt} dt + \left[\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} \varphi(z)\, w(z)\, dz - \sum_1^{m_n} \gamma_r\right]_0,$$

„ [ove s' intende che il secondo termine sia la parte reale (o „ il coefficiente dell' immaginario) del termine stesso], o la „ derivata di questa quantità, soddisfino alle solite condizioni „ dei paragrafi precedenti pel valore α che si considera; e nel „ caso particolare in cui (considerando la funzione $f(x)$ soltanto nei punti α nei cui intorni non fà infinite oscillazioni „ o ammette una derivata che resta atta alla integrazione anche „ ridotta ai suoi valori assoluti) ci si limiti a richiedere che „ fra $-\varepsilon$ e ε $G_{n,t}$ debba restar sempre numericamente inferiore „ a un numero finito, allora basterà che questa condizione si „ trovi soddisfatta per la parte reale (o per il coefficiente „ dell' immaginario) della solita espressione (35) „.

E se avverrà che per un numero finito di valori di t fra $a-\alpha$ e $-\varepsilon_1$ o fra ε_1 e $b-\alpha$ la derivata rispetto a t della espressione (35) non sia numericamente inferiore a un certo numero finito qualunque sia l'ampiezza di C_n, o si sia incerti, allora bisognerà che il prodotto di questa derivata per $f(\alpha+t)$ o l'altro $f(\alpha+t)\dfrac{\partial G_{n,t}}{\partial t}$ soddisfi alla condizione indicata sopra (§. 57); e in tal caso per questi valori eccezionali di t non sarà neppure necessario di fare le altre verificazioni.

Le indicate verificazioni poi, anzichè sulla parte reale o sul coefficiente dell' immaginario della espressione (35) o sui loro limiti, potranno farsi talvolta con maggiore facilità sulle parti corrispondenti della somma o delle serie che loro corrispondono secondo le formole precedenti. Ordinariamente poi la derivata della espressione (35), oltre che sotto la forma:

$$\sum_1^n{}_r \sum_1^m{}_s c_r \varphi_s(\lambda_r)\, H_s(\lambda_r, \alpha)\, H_s(\lambda_r, \alpha+t)\, F(\alpha+t),$$

che risulta dalla (31), potrà porsi anche sotto l'altra:

$$\frac{F(\alpha+t)}{2\pi i}\int_{C_n} w(z)\sum_1^m \varphi_s(z)\, H_s(z,\alpha)\, H_s(z,\alpha+t)\, dz - \frac{\partial}{\partial t}\sum_1^{m_n}\gamma_r,$$

e le verificazioni relative potranno farsi sulla parte reale o sul coefficiente dell' immaginario nell' una o nell' altra di queste espressioni; e quando in un modo o in un altro le indicate verificazioni siano state fatte, allora potrà dirsi che nella serie (15) si ha:

$$(36)\quad \left\{\begin{aligned}
&\varphi(t,\alpha,h_0) = -\frac{\partial\chi}{\partial t}\;,\quad p_{n,s} = [c_n\,\varphi_s(\lambda_n)]_0\;,\quad G = \chi(\alpha,+0),\\
&\varphi(t,\alpha,h_n) = -\frac{\partial\chi}{\partial t} + \left[\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}\int_{C_n}\varphi(z)\, w(z)\, dz - \frac{\partial}{\partial t}\sum_1^{m_n}\gamma_r\right]_0 = -\frac{\partial\chi}{\partial t} +\\
&\qquad + \sum_1^n{}_r \sum_1^m{}_s\, [c_r\,\varphi_s(\lambda_r)]_0\, H_s(\lambda_r,\alpha)\, H_s(\lambda_r,\alpha+t)\, F(\alpha+t),\\
&\int_0^t \varphi(t,\alpha,h_n)dt = \chi(\alpha,\pm 0) - \chi(\alpha,t) + \left[\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\varphi(z)\, w(z)\, dz - \sum_1^{m_n}\gamma_r\right]_0 = \chi(\alpha,\pm 0) -\\
&\qquad - \chi(\alpha,t) + \sum_1^n{}_r \sum_1^m{}_s\, [c_r\,\varphi_s(\lambda_r)]_0\, H_s(\lambda_r,\alpha)\int_0^t F(\alpha+t)\, H_s(\lambda_r,\alpha+t)dt,
\end{aligned}\right.$$

ove $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$, sono i residui di $w(z)$ nei punti d'infinito $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$; in $\chi(\alpha,\pm 0)$ deve prendersi il segno $+$ o il segno $-$ secondochè nella formola il t è positivo o negativo; e i simboli $[\;]_0$ indicano, secondo i casi, la parte reale o il coefficiente dell' immaginario della quantità entro la parentesi.

Ordinariamente poi potranno invertirsi le integrazioni relative a t e a z, e talvolta facendo questa inversione i calcoli potranno ridursi più semplici.

65. Merita inoltre di essere notato che, in forza delle nostre ipotesi e della equazione (31), se si troverà che i prodotti $c_r\,\varphi_s(\lambda_r)$ sono reali (o puramente immaginarii) altrettanto

dovrà accadere della espressione (35) e della funzione $\chi(\alpha, t)$, e quindi le verificazioni potranno farsi senz' altro sulla espressione stessa e sulla sua derivata ec. (o su queste quantità divise per i); l' immaginario venendo a sparire di suo a calcoli eseguiti.

Se poi, senza stare a distinguere la parte reale dalla immaginaria nella espressione (35) e nella sua derivata, troveremo che si verificano pei moduli le particolarità che sopra si chiedevano pei valori assoluti delle parti reali (o dei coefficienti dell'immaginario); e oltre a ciò troveremo che per $n=\infty$ la intiera espressione (35) ha un limite determinato e finito (reale o complesso); e indicato ancora questo limite con $\chi(\alpha, t)$, esso gode delle proprietà dette sopra, o anche, senza soddisfare alla condizione $\chi(\alpha, +0) = -\chi(\alpha, -0)$, è tale che sono diverse da zero e eguali e di segno contrario le parti reali di $\chi(\alpha, +0)$ e $\chi(\alpha, -0)$, o lo sono le parti immaginarie; allora le condizioni del teorema rimarranno tutte verificate di per sè sulle formole che si ottengono prendendo soltanto la parte reale delle quantità che vi figurano, o prendendo soltanto i coefficienti delle parti immaginarie; talchè lo sviluppo (33) sarà certamente applicabile.

È per questo appunto che, senza distinguere nelle nostre formole la parte reale dalla parte immaginaria, le verificazioni verranno fatte da noi sulla intiera espressione (35) o sulla sua derivata; coll' avvertenza soltanto che quando si trovi che qualche condizione non è soddisfatta e i coefficienti $c_r \varphi_s(\lambda_r)$ sono complessi, allora converrà passare a considerare separatamente le parti reali o le parti immaginarie, potendo darsi per es. che l'indeterminazione nel limite della espressione (35) provenga dalla parte immaginaria e non dalla parte reale, ec.

Giova però avvertire che se nel fare queste verificazioni sulla intiera espressione (35) si troverà che la sola condizione non soddisfatta è quella relativa alle parti reali o immaginarie di $\chi(\alpha, +0)$ e $\chi(\alpha, -0)$, e si avrà $\chi(\alpha, +0)=\mu+i\nu, \chi(\alpha, -0)=\rho+i\sigma$, senza che sia nè $\mu=-\rho$, nè $\nu=-\sigma$; allora fatta eccezione soltanto pel caso in cui si avesse $\rho\nu-\mu\sigma=0$, potremo sempre

determinare infiniti numeri reali p e q pei quali si abbia $\mu\, p - \nu\, q = -(\rho\, p - \sigma\, q)$, ovvero $(\mu+\rho)\, p - (\nu+\sigma)\, q = 0$, senza che $\mu\, p - \nu\, q$ sia uguale allo zero; e quindi se alle funzioni $\varphi_s(z)$ sostituiremo le altre $(p+i\,q)\,\varphi_s(z)$ rimarrà soddisfatta anche la condizione che dapprima non trovavasi verificata.

66. Aggiungiamo ora che, come notammo sopra, le funzioni $\varphi_1(z), \varphi_2(z), .. \varphi_m(z)$ non possono divenire infinitesime in ciascuno dei punti $\lambda_1, \lambda_2, .. \lambda_n, ..$; ma questa condizione (cui pure talvolta gioverà di tenere mente nel fare la determinazione delle funzioni stesse) sarà soddisfatta di per sè quando lo saranno le altre condizioni poste sopra. E quando, come ordinariamente accade, i punti $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n, ..$ sono tutti da una stessa parte di uno degli assi x e y, per es. a destra di quello delle y, allora potrà prendersi per linea C_n una linea che sia anch'essa tutta a destra di quest'asse, come ad es. l'asse delle y e una mezza circonferenza col centro all' origine, o un rettangolo di cui un lato sia sull' asse delle y, quando però non vi siano punti d' infinito di $\varphi(z)\, w(z)$ sul quest' asse, o altrimenti escludendo questi punti con piccoli semicerchi, ec.... In questi casi poi l'integrale $\int \varphi(z)\, w(z)\, d\, z$ esteso ad alcune porzioni di C_n potrà talvolta essere zero identicamente, o tendere a zero al crescere indefinito di C_n, e allora questa parte potrà tralasciarsi senz'altro; e così per es. se l'asse delle y farà parte di C_n e la funzione $\varphi(z)\, w(z)$ cambierà soltanto di segno al mutare di z in $-z$, o almeno questo avverrà sull'asse delle y, allora nell' integrale $\int_{C_n} \varphi(z)\, w(z)\, d\, z$ potrà tralasciarsi la parte estesa all' asse delle y, poichè essa sarà zero identicamente, ec.

67. Lo studio della differenza $\frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n} \varphi(z)\, w(z)\, dz - \sum_1^{m_n} \gamma_r$, ove C'_n è l'intiera linea C_n o quella parte di essa che, secondo quanto abbiamo detto, basterà di considerare, presenterà spesso difficoltà assai gravi. Giova però notare che se la serie $\sum_1^{\infty} \gamma_r$

si ridurrà a un numero finito di termini o si saprà che è convergente, allora nel cercare per es. il limite della indicata differenza (o delle sue parti reali o immaginarie), basterà limitarsi a considerare l'integrale $\frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n}\varphi(z)\,w(z)dz$; e se il prodotto $\varphi(z)w(z)$ quando il modulo di z sia sufficientemente grande si potrà porre sotto la forma $P(\alpha, t, z) + A(\alpha, t, z)$, ove per α e t compresi fra i soliti limiti (dati o da determinarsi) $P(\alpha, t, z)$ è sempre monodroma e continua entro le curve C_n e diviene infinita in un numero limitato o illimitato di punti $a_1, a_2, ..$ coi residui $b_1, b_2, ..$ che in generale dipenderanno da α e da t, mentre $A(\alpha, t, z)$ è tale che l'integrale $\int_{C'_n} A(\alpha, t, z)\,dz$ al crescere indefinito di C_n abbia per limite zero o una quantità conosciuta $A\,\alpha, t)$, allora la quantità da considerarsi si ridurrà all' altra $\frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n} P(\alpha, t, z)\,dz + \frac{A(\alpha, t)}{2\pi i} - \sum \gamma_r$, e basterà vedere se il limite di questa (o della sua parte reale o del coefficiente dell' immaginario) darà una funzione $\chi(\alpha, t)$ che soddisfa alle condizioni generali poste sopra.

Nel caso poi che C'_n sia l'intiera linea C_n e non vi siano su essa punti d'infinito di $P(\alpha, t, z)$, all'integrale $\frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n} P(\alpha, t, z)\,dz$ potremo sostituire senz' altro la somma Σb_r dei residui di $P(\alpha, t, z)$; mentre se C'_n è soltanto una parte di C_n ed è percorsa nel senso diretto, formando con questa parte C'_n e con un altra linea C''_n un contorno chiuso che non passi mai per alcuno dei punti $a_1, a_2, ..,$ e che potrà anche essere la intera linea primitiva C_n, noi potremo sostituire all' integrale $\frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n} P(\alpha, t, z)\,dz$ la somma Σb_r dei residui, con più

l' integrale $\frac{1}{2\pi i}\int_{C''_n} P(\alpha, t, z)\, dz$ esteso alla linea aggiunta C''_n percorsa convenientemente.

Rispetto poi all' integrale $\int_{C'_n} A(\alpha, t, z)\, dz$ farò osservare che quando C'_n sarà una porzione di cerchio di raggio ρ, allora, avendosi su C'_n $z=\rho e^{\theta i}$, $dz=z\, i\, d\theta$, e l'integrazione rispetto a θ venendo a farsi fra limiti finiti, l'integrale stesso al crescere indefinito di C'_n verrà ad avere per limite zero tutte le volte che su C'_n la funzione $z\, A(\alpha, t, z)$ finisce per avere un modulo sempre inferiore a un numero arbitrariamente piccolo in tutti i punti di C'_n, o fatta tutt' al più eccezione per un numero finito di punti nei cui intorni però il detto modulo resta ancora finito, ec.

Queste osservazioni ed altre simili che caso per caso si presenteranno spesso spontaneamente, potranno tornare utili anche per gli altri studî che dovremo fare sulla differenza $\frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n} \varphi(z)\, u(z)\, dz - \sum_1^{m_n} \gamma_r$ per applicare il teorema enunciato sopra.

68. Ma la difficoltà più grave per l'applicazione del teorema del §. 64. proverrà di solito dalla ricerca che sarebbe da farsi delle funzioni $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \ldots, \varphi_m(z)$.

In certi casi però queste funzioni si trovano subito; e d'altronde, poichè il più spesso invece degli sviluppi (15) si hanno da considerare quelli più particolari (16), la indicata difficoltà nei casi ordinarii viene a sparire di per sè; perchè essendo dati allora anticipatamente i coefficienti $p_{n,s}$ e alle serie (19) o (22) venendo a sostituirsi le (20) o (23) nelle quali tutto è già conosciuto, si vede subito come debbano essere scelte le funzioni $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \ldots, \varphi_m(z)$, o la funzione $\varphi(z)$ che comparisce nell' integrale $\frac{1}{2\pi i}\int \varphi(z)\, u(z)\, dz$.

In questo caso infatti, per potere applicare le formole (30) conviene ridurre la serie $\sum_1^\infty c_n \varphi(\lambda_n)$, o l' altra $\sum_1^\infty \frac{\varphi(\lambda_n)}{u'(\lambda_n)}$ ove $u(z)$ è l'inversa di $w(z)$, alle forme (20) o (23); dunque, limitandosi al caso della serie (20), evidentemente la funzione $\varphi(z)$ dovrà ora determinarsi colla formola:

$$\varphi(z) = \sum_1^m \frac{H_s(z,\alpha)\int_0^t F(\alpha+t)\, H_s(z\,,\,\alpha+t)\,dt}{\int_a^b F(t)\, H_s^2(z\,,\,t)\,dt}\, u'(z) + \pi_1(\alpha\,,\,t\,,\,z)$$

ove la $\pi_1(a\,,\,t\,,\,z)$ è una funzione monodroma di z che si annulla nei punti $\lambda_1\,,\lambda_2\,,\ldots,\lambda_n\,,\ldots$ ma che del resto è arbitraria, e quindi può anche prendersi uguale a zero senz' altro, o in quel modo che più tornerà adatto pei calcoli da farsi; giacchè (come anche del resto potrebbe vedersi direttamente), non venendo essa a figurare nel secondo membro della formola (20), non può alterare il valore del primo membro.

Così facendo la prima delle (30) ci darà la formola:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\varphi(z)\, w(z)\, dz - \sum_1^{m_n}\gamma_r = \sum_1^n{}_r \sum_1^m{}_s \frac{H_s(\lambda_r,\alpha)\int_0^t F(\alpha+t)\, H_s(\lambda_r\,,\,\alpha+t)\,dt}{\int_a^b F(t)\, H_s^2(\lambda_r\,,\,t)\,dt},$$

ove $\varphi(z)$ è data dalle formole precedenti, e le γ_r sono i residui di $\varphi(z)\, w(z)$ nei punti d'infinito entro C_n diversi da $\lambda_1\,,\lambda_2\,,\ldots,$ $\lambda_n\,,\ldots$, talchè evidentemente la questione della possibilità o nò di rappresentare la funzione $f(x)$ data fra a e b con una serie come la (16) viene ridotta all' esame della differenza $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\varphi(z)\, w(z)\, dz - \sum_1^{m_n}\gamma_r$ la quale ora contiene l'immaginario

soltanto apparentemente (perchè il secondo membro della formola precedente è reale); e per α compreso fra a e b questa differenza deve avere per limite $\frac{1}{2}$ quando t è diverso da zero e compreso fra 0 e $b-\alpha$, e $-\frac{1}{2}$ quando t è pure diverso da zero e compreso fra $a-\alpha$ e 0 (gli estremi $\pm(b-a)$ al più escl. per $a=\alpha$ o $\alpha=b$); e per questa differenza si dovranno avere inoltre le varie particolarità che si richiedevano nel caso precedente, intendendo però ora che la quantità allora indicata con $\chi(\alpha, t)$ debba essere $\frac{1}{2}$ per t positivo e $-\frac{1}{2}$ per t negativo.

In questo caso particolare dunque il teorema del §. 64. prende l'enunciato più semplice seguente: „ Posti gli stessi „ dati che nel teorema del §. 64. con più la condizione che „ quando non è al tempo stesso $s=t$, $n=p$ si abbia:

$$(37) \qquad \int_a^b \mathrm{F}(x)\, \mathrm{H}_s(\lambda_n, x)\, \mathrm{H}_t(\lambda_n, x)\, dx = 0\,,$$

„ si può assicurare che una funzione di una variabile reale x „ data arbitrariamente fra a e b si svilupperà nei soliti casi „ secondo la serie:

$$(38) \quad \sum_1^\infty \left\{ q_{n,1}\, \mathrm{H}_1(\lambda_n, \alpha) + q_{n,2}\, \mathrm{H}_2(\lambda_n, \alpha) + \ldots + q_{n,m}\, \mathrm{H}_m(\lambda_n, \alpha) \right\},$$

„ ove:

$$(39) \qquad q_{n,s} = \frac{\int_a^b f(x)\, \mathrm{F}(x)\, \mathrm{H}_s(\lambda_n, x)\, dx}{\int_a^b \mathrm{F}(x)\, \mathrm{H}_s^2(\lambda_n, x)\, dx}\,,$$

„ tutte le volte che ponendo:

$$\varphi(z)=\sum_{1}^{m}{}_s \frac{H_s(z,\alpha)\int_0^t F(\alpha+t)\,H_s(z,\alpha+t)\,dt}{\int_a^b F(t)\,H_s^2(z,t)\,dt}\,u'(z)+\pi_1(\alpha,t,z),$$

„ questa funzione $\varphi(z)$ pei valori di α e di t che si conside-
„ rano risulta una funzione monodroma e continua di z entro
„ i soliti campi C_n tale che la differenza:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\varphi(z)\,u(z)\,dz-\sum_{1}^{m_n}\gamma_r \tag{40}$$

„ per α compreso fra a e b (a e b al più escl.) al crescere in-
„ definito di C_n abbia per limite $\frac{1}{2}$ quando t è fra 0 e $b-\alpha$,
„ e $-\frac{1}{2}$ quando t è fra $a-\alpha$ e 0 (0 sempre escl.); e di più
„ per ogni valore di n e pei valori di t compresi nei soliti
„ intervalli da $a-\alpha$ a $-\varepsilon_1$ e da ε_1 a $b-\alpha$ la stessa differenza
„ abbia una derivata rispetto a t sempre inferiore a un numero
„ finito, e similmente pei valori di t compresi fra $-\varepsilon$ e ε la
„ differenza medesima abbia un valore numericamente inferiore
„ a un numero finito, o soddisfi alle solite condizioni dei pa-
„ ragrafi precedenti „.

Al solito poi se la derivata rispetto a t della espressione (40) per un numero finito di valori di t negli intervalli da $a-\alpha$ a $-\varepsilon_1$ e da ε_1 a $b-\alpha$ non si manterrà sempre numericamente inferiore a un numero finito o si sarà incerti, il prodotto di essa per $f(\alpha+t)$ negli intorni degli stessi punti dovrà soddisfare alla condizione d' integrabilità che si aveva negli stessi casi per $f(\alpha+t)\,G_{n,t}$ nei paragrafi precedenti; e allora per questi valori eccezionali di t non occorrerà fare le altre verificazioni sulla differenza (40).

Nè si deve dimenticare che in queste formole la funzione $\pi_1(\alpha,t,z)$ potrà, come fu detto sopra, essere presa uguale a zero,

o anche in quell'altro modo qualsiasi che più renderà agevole l'esame della indicata differenza (40), con che però essa si annulli nei punti $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n, ..$, e sia monodroma e continua entro C_n. Al variare poi di questa funzione $\pi_1(\alpha, t, z)$ varieranno naturalmente, come $\varphi(z)$, anche le quantità γ_r che sono i residui di $\varphi(z)\, w(z)$ nei punti d'infinito diversi da $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n, ..$; e in ogni caso per l'esame de la differenza (40) potranno giovare le considerazioni del paragrafo precedente.

69. Se invece delle (30) si usano le altre formole simili che abbiamo date nel §. 63, si trovano dei teoremi analoghi a quelli dei paragrafi precedenti che in certi casi possono servire meglio di questi per esaminare se sia possibile sviluppare la solita funzione $f(x)$ secondo le serie (15) o (16).

Limitiamoci infatti a considerare il caso più comune della serie (16), e ricordiamo che nel §. 63. si trovò la formola:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} \varphi(z)\, \psi(z)\, w^2(z)\, dz - \sum_1^{m_n} \gamma_r = \sum_1^{n} \frac{\varphi(\lambda_n)\, \psi(\lambda_n)}{u'(\lambda_n)^2},$$

ove $\varphi(z)$, $w(z)$, $u(z)$ e γ_r hanno i soliti significati generali del §. 63 stesso, e la funzione $\psi(z)$ è anch'essa monodroma e continua entro C_n, e oltre a ciò soddisfa alla condizione $\psi'(\lambda_n)\, u'(\lambda_n) - \psi(\lambda_n)\, u''(\lambda_n) = 0$ per modo che può prendersi sempre $\psi(z) = \pi(z)\, u'(z)$ ove $\pi(z)$ è monodroma e continua entro C_n e la sua derivata si annulla nei punti $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n, ..$; e se vorremo servirci di questa formola per studiare la serie (20) e la somma dei suoi primi n termini, converrà potere determinare $\varphi(z)$ e $\psi(z)$ in modo che si abbia:

$$\frac{\varphi'(\lambda_n)\, \psi(\lambda_n)}{u'(\lambda_n)^2} = \sum_1^{m} \frac{H_s(\lambda_n, \alpha)\int_0^t F(\alpha+t)\, H_s(\lambda_n, \alpha+t)\, dt}{\int_a^b F(t)\, H_s^2(\lambda_n, t)\, dt},$$

con:

$$\psi'(\lambda_n)\, u'(\lambda_n) - \psi(\lambda_n)\, u''(\lambda_n) = 0.$$

Per questo basterà che sia:

$$\varphi'(z) = \sum_1^m \frac{H_s(z, \alpha) \int_0^t F(\alpha+t) H_s(z, \alpha+t)\, dt}{\psi(z) \int_0^t F(t) H_s^2(z, t)\, dt} - u'(z)^2 + \pi_1(\alpha, t, z),$$

con:

$$\psi'(\lambda_n)\, u'(\lambda_n) - \psi(\lambda_n)\, u''(\lambda_n) = 0,$$

ove $\pi_1(\alpha,t,z)$ deve essa pure essere monodroma e continua entro C_n e annullarsi nei punti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$; dunque se questa funzione $\pi_1(z,\alpha,t)$ potra determinarsi insieme a $\psi(z)$ in modo che $\varphi'(z)$ sia finita entro C_n, o che nei punti d'infinito che essa vi avesse i residui corrispondenti siano uguali a zero, allora siccome la funzione $\varphi(z)$ verrà ad essere monodroma entro C_n, si potrà assicurare che si ha la formola:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \varphi(z)\, \psi(z)\, w^2(z)\, dz - \sum_1^{m_n} \gamma_r = \sum_1^n {}_r \sum_1^m {}_s \frac{H_s(\lambda_r, \alpha) \int_0^t F(\alpha+t) H_s(\lambda_r, \alpha+t)\, dt}{\int_a^b F(t) H_s^2(\lambda_r, t)\, dt},$$

ove nel primo membro l'immaginario non sarà che apparente perchè il secondo è reale; talchè si conclude ora senz' altro che „ Posti i dati del paragrafo precedente, la funzione $f(x)$ data fra „ a e b sarà sviluppabile nei soliti casi in serie della forma:

$$\sum_1^\infty \left(q_{n,1} H_1(\lambda_n, \alpha) + q_{n,2} H_2(\lambda_n, \alpha) + \ldots + q_{n,m} H_m(\lambda_n, \alpha) \right),$$

„ ove:

$$q_{n,s} = \frac{\int_a^b f(x) F(x) H_s(\lambda_n, x)\, dx}{\int_a^b F(x) H_s^2(\lambda_n, x)\, dx},$$

„ tutte le volte che:

1.° indicata con $\psi(z)$ una funzione monodroma e continua „ entro C_n per la quale si abbia $\psi'(\lambda_n)\, u'(\lambda_n) - \psi(\lambda_n)\, u''(\lambda_n) = 0$, „ e con $\pi_1(\alpha, t, z)$ una funzione pur monodroma e continua „ entro C_n che si annulli nei punti $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_n, ..$, si possano deter- „ minare queste funzioni in modo che la espressione:

$$(41) \qquad \sum_1^m \frac{H_s(z,\alpha)\int_0^t F(\alpha+t)\, H_s(z,\alpha+t)\, dt}{\psi(z)\int_a^b F(t)\, H_s^2(z,t)\, dt}\, u'(z)^2 + \pi_1(\alpha, t, z),$$

„ resti sempre finita entro C_n o abbia i suoi infiniti di ordine „ superiore al primo e coi residui tutti uguali a zero;

2.° „ che determinata una funzione $\varphi(z)$ (che allora sarà „ pur monodroma e continua entro C_n) che abbia per derivata „ la espressione (41), si trovi che la differenza:

$$(42) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} \varphi(z)\, \psi(z)\, u'^2(z)\, dz - \sum_1^{m_n} \gamma_r$$

„ al crescere indefinito di C_n pei valori di α fra a e b (a e b „ al più escl.) ha per limite $\frac{1}{2}$ quando t è diverso da zero e „ compreso fra 0 e $b-\alpha$ e $-\frac{1}{2}$ quando t è pur diverso da zero „ e compreso fra $a-\alpha$ e 0; e di più si trovi che per ogni „ valore di n e pei valori di t nei soliti intervalli $(a-\alpha, -\varepsilon_1)$, „ $(\varepsilon_1, b-\alpha)$ la stessa differenza ha una derivata rispetto a t „ numericamente inferiore a un numero finito, e pei valori di t „ compresi fra $-\varepsilon$ e ε questa differenza è sempre numericamente „ inferiore a un numero finito, o soddisfa alle altre condizioni „ dei paragrafi precedenti „.

Al solito poi se la derivata rispetto a t della espressione (42) non soddisfarà alla condizione di esser sempre numericamente inferiore a un numero finito negli intervalli $(a-\alpha, -\varepsilon_1)$,

$(\varepsilon_1, b-\alpha)$, o si sarà incerti, allora il prodotto di questa derivata per $f(\alpha+t)$ negli intorni dei punti di eccezione, supposti in numero finito, dovrà soddisfare alla condizione stessa che nei casi simili si aveva pel prodotto $f(\alpha+t)\,G_{n,t}$ nei paragrafi precedenti; e non vi sarà bisogno di verificare se per questi valori di t le altre condizioni sono soddisfatte.

E si può notare che spesso vi rimarrà molta arbitrarietà per le funzioni $\psi(z)$ e $\pi_1(\alpha, t, z)$; e di questa arbitrarietà potremo giovarci per rendere più semplice la determinazione di $\varphi(z)$, o l'esame della differenza $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\varphi(z)\,\psi(z)\,w^2(z)\,dz - \sum_1^{m_n}\gamma_r$, pel quale esame potranno tornare utili anche le considerazioni del §. 67.

Inoltre si deve notare che quando il teorema ora dimostrato, o gli altri analoghi che si potrebbero ottenere valendosi delle altre formole del §. 63, ci conducono a concludere che gli sviluppi sotto la forma (15) o (16) sono possibili, anche i teoremi dei paragrafi precedenti ci condurrebbero evidentemente a concludere altrettanto, ma in certi casi potrebbero essere di una applicazione più difficile.

70. È ora utile l'osservare che se cercando i limiti delle espressioni (40) o (42), invece di trovare $\frac{1}{2}$ quanto t è positivo e $-\frac{1}{2}$ quando t è negativo, si trovasse per limite una funzione di t che per t positivo è uguale a $\frac{1}{2}+\chi_1(\alpha,t)$ e per t negativo è uguale a $-\frac{1}{2}+\chi_1(\alpha, t)$, ove $\chi_1(\alpha, t)$ è finita e continua, si annulla con t, e ammette una derivata che è determinata e finita rispetto a t per ogni valore di α fra a e b (a e b al più escl.) e per ogni valore di t fra $a-\alpha$ e $b-\alpha$, tranne tutt'al più pei soliti valori eccezionali di t in numero finito negl' intorni dei quali però l' integrale $\int f(\alpha+t)\frac{\partial\chi_1}{\partial t}\,dt$ è piccolo a

piacere anche riducendo $f(\alpha+t)\,\frac{\partial\chi_1}{\partial t}$ ai suoi valori assoluti; allora non saranno applicabili i teoremi dei due paragrafi precedenti, e non si avrà precisamente lo sviluppo (38), ma sarà evidentemente applicabile il teorema del §. 64; e invece dello sviluppo (38) se ne avrà un altro che differisce da questo per l'aggiunta del termine $-\int_a^b f(x)\left(\frac{\partial\chi_1}{\partial t}\right)dx$, ove $\left(\frac{\partial\chi_1}{\partial t}\right)$ indica ciò che diviene $\frac{\partial\chi_1}{\partial t}$ cambiandovi t in $x-\alpha$, per modo cioè che si ha lo sviluppo:

$$-\int_a^b f(x)\left(\frac{\partial\chi_1}{\partial t}\right)dx+\sum_1^\infty\left\{q_{n,1}\,H_1(\lambda_n,\alpha)+\ldots+q_{n,m}\,H_m(\lambda_n,\alpha)\right\},$$

ove le $q_{n,s}$ sono date ancora dalla (39).

71. È inoltre degno di nota che quando il teorema del §. 64. è applicabile, colle notazioni in esso usate si ha la formola:

$$(43)\quad \chi(\alpha,t)=\sum_1^\infty{}_n\sum_1^\infty{}_s\,[c_n\varphi_s(\lambda_n)]_0\,H_s(\lambda_n,\alpha)\int_0^t F(\alpha+t)\,H_s(\lambda_n,\alpha+t)dt,$$

ove t è diverso da zero e compreso fra 0 e $b-\alpha$ o fra $a-\alpha$ e 0 ($\alpha=a$, e $\alpha=b$ al più escl.).

Invece quando saranno applicabili i teoremi dei §§. 68 o 69, avremo l' altra formola:

$$(44)\qquad \pm\frac{1}{2}=\sum_1^\infty{}_n\sum_1^m{}_s\frac{H_s(\lambda_n,\alpha)\int_0^t F(\alpha+t)\,H_s(\lambda_n,\alpha+t)\,dt}{\int_0^b F(t)\,H^2_s(\lambda_n,t)\,dt},$$

ove t è ancora diverso da zero e compreso negli intervalli precedenti, e nel primo membro deve prendersi il segno $+$ o il segno $-$ secondochè t è positivo o negativo.

72. Prima di passare a applicare i teoremi ultimamente dimostrati e quelli dei §§. 57, 58, 59 e 60 ci è utile di fare una osservazione generale.

Si incominci perciò dal notare che avendo applicato sempre il teorema del §. 23, nella dimostrazione del quale si ebbe in mira di non porre alcuna limitazione per la funzione $f(x)$ all'infuori di quella di essere finita e integrabile fra a e b, n'è venuto di necessità che nei teoremi del capitolo presente abbiamo dovuto porre sempre la condizione che la derivata rispetto a t della quantità indicata con $G_{n,t}$ o delle differenze (35), (40) o (42) per tutti i valori di t fra $a-\alpha$ e $-\varepsilon_1$ e fra ε_1 e $b-\alpha$ restasse sempre numericamente inferiore a un numero finito al crescere indefinito di n, o tutt' al più vi fosse soltanto eccezione per un numero finito di valori di t pei quali allora dovevano verificarsi le condizioni che si posero in fine del §. 57.

Quando però, come ordinariamente accade, ci si limita a considerare funzioni $f(x)$ per le quali l'intervallo in cui sono date può scomporsi (quando sia necessario) in un numero finito d'intervalli parziali ove le funzioni stesse oltre essere finite e integrabili soddisfano a una almeno delle condizioni seguenti:

a) di presentare un numero finito di oscillazioni;

b) di ammettere una derivata o un estremo oscillatorio che resti atto alla integrazione anche ridotto ai suoi valori assoluti;

c) che scomposto l'intervallo parziale che si considera in altri comunque piccoli, la somma delle oscillazioni corrispondenti non superi mai un numero finito;

allora nella applicazione dei teoremi di questo capitolo non importa richiedere come dicevamo sopra che fra $a-\alpha$ e $-\varepsilon_1$ e fra ε_1 e $b-\alpha$ la derivata rapporto a t di $G_{n,t}$ o delle differenze (35), (40) o (42) resti sempre numericamente inferiore a un numero finito qualunque sia n, ma basta invece richiedere che questa derivata considerata per ogni valore finito di n separatamente sia finita e continua e cangi segno un numero finito di volte, e che per gli stessi valori di t fra $a-\alpha$ è $-\varepsilon_1$

e fra ε_1 e $b-\alpha$ la quantità medesima $G_{n,t}$ o le differenze (35), (40) o (42) convergano in ugual grado verso il loro limite al crescere indefinito di n; o tutt' al più vi siano incertezze per il solito numero finito di valori di t pei quali allora si richiederà che sia verificata la condizione posta in fine del §. 57. o quella che porremo al §. 73.

Tutto questo avviene perchè può dimostrarsi che „ se in „ ciascuno dei varii intervalli in cui quando sia necessario deve „ intendersi scomposto (a,b) la funzione $f(x)$ oltre essere finita e „ integrabile soddisfa a una almeno delle condizioni a), b), c) „ ora indicate, il teorema del §. 23. continua a sussistere anche „ quando per la funzione ivi rappresentata con $\varphi(x,h)$ si sà soltanto che essa è finita per ogni valore speciale di n separatamente, purchè allora questa funzione $\varphi(x,h)$ sia anche continua „ e per ogni valore di n cangi di segno un numero finito di volte „ (che può anche crescere indefinitamente con n), e oltre a ciò „ sia tale che l'integrale $\int_a^x \varphi(x,h)dx$ al crescere indefinito di h „ converga in ugual grado verso il limite zero „.

Considerando infatti una delle porzioni (α,β) in cui, quando è necessario, si ammette potersi scomporre l'intervallo dato (a,b), supponiamo dapprima che $f(x)$ fra α e β soddisfi alla condizione a) o alla c); e prendendo un valore qualsiasi di h, indichiamo con $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_m$ i punti fra α e β nei quali $\varphi(x,h)$ cangia di segno, con $\theta_1, \theta_2, \theta_3, .., \theta_{m-1}, \theta_\beta$ i valori di $\int_\alpha^x \varphi(x,h)\,dx$ nei punti $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_{m-1}, \beta$, e con $f_1, f_2, f_3, ..., f_{m-1}, f_m$ dei valori convenienti presi fra i limiti inferiori e superiori di $f(x)$ negli intervalli da α a α_1, da α_1 a α_2, da α_2 a α_3, .., da α_{m-2} a α_{m-1}, e da α_{m-1} a β.

Avremo:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\varphi(x,h)\,dx = \left(\int_\alpha^{\alpha_1} + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} + .. + \int_{\alpha_{m-2}}^{\alpha_{m-1}} + \int_{\alpha_{m-1}}^{\beta}\right) f(x)\,\varphi(x,h)\,dx\,,$$

e per la formola (1) del §. 9. sarà:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x,h)\,d\,x = f_1\int_\alpha^{\alpha_1}\varphi(x,h)\,d\,x + f_2\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\varphi(x,h)\,d\,x + \ldots$$

$$+ f_{m-1}\int_{\alpha_{m-2}}^{\alpha_{m-1}}\varphi(x\,,h)\,d\,x + f_m\int_{\alpha_{m-1}}^{\beta}\varphi(x\,,h)\,d\,x\,,$$

ovvero:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\varphi(x,h)\,d\,x = \theta_1(f_1-f_2)+\theta_2(f_2-f_3)+\ldots+\theta_{m-1}(f_{m-1}-f_m)+\theta_\beta f_m;$$

quindi, se a partire dal valore che si considera di h l'integrale $\int_\alpha^x \varphi(x\,,h)\,d\,x$ per x fra α e β non supera in valore assoluto il numero σ sarà:

$$\text{val. ass.}\int_\alpha^\beta f(x)\,\varphi(x\,,h)\,d\,x < \sigma\,(\lambda + \Sigma\,D'_s)\,,$$

ove λ è il limite superiore dei valori assoluti di $f(x)$ fra α e β e D'_1, $D'_2,\ldots$ sono le oscillazioni di $f(x)$ fra α e α_2, fra α_1 e α_3, fra α_2 e $\alpha_4,\ldots$, e la somma di queste oscillazioni non supera evidentemente quella delle oscillazioni fra α e α_2, fra α_2 e α_4, fra α_4 e $\alpha_6,\ldots$, e fra α e α_1, fra α_1 e α_3, fra α_3 e $\alpha_5,\ldots$; e questo basta evidentemente per poter dire che la particolarità suindicata sussiste sempre quando $f(x)$ fra α e β soddisfa alle condizioni a) e c).

Lo stesso accade se $f(x)$ fra α e β soddisfa alla condizione b), giacchè allora indicando con $f_1(x)$ la derivata o l'estremo oscillatorio di $f(x)$, e con $\theta(x)$ l'integrale $\int_\alpha^x \varphi(x,h)\,d\,x$, e facendo una integrazione per parti si trova:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\varphi(x\,,h)dx = f(\beta)\int_\alpha^\beta \varphi(x\,,h)\,dx - \int_\alpha^\beta f_1(x)\,\theta(x)\,d\,x\,,$$

e in questa l'integrale $\int_\alpha^x \varphi(x,h)\,d\,x$ o $\theta(x)$ a partire da un certo

valore di h e per qualsiasi valore di x fra α e β è numericamente inferiore a quel numero che più ci piace; dunque è ora dimostrato completamente quanto abbiamo enunciato.

73. Aggiungiamo che la condizione posta ora che $\varphi(x,h)$ o le derivate di $G_{n,t}$ o delle differenze (35), (40) o (42) per ogni valore finito di h o di n cangino di segno un numero finito di volte quando x o t sono negl' intervalli che si considerano equivale all'altra che l'integrale $\int_\alpha^x \varphi(x,h)\,dx$, o le funzioni stesse $G_{n,t}$, (35), (40) o (42) abbiano negli intervalli medesimi un numero finito di massimi e minimi; e propriamente questa condizione può anche tralasciarsi quando $f(x)$ soddisfa alla condizione b) perchè nella dimostrazione fatta sopra per questo caso non si tien conto di quei massimi e minimi.

Del resto poi tanto questa condizione quanto l'altra posta sopra che la funzione $\varphi(x,h)$ o le derivate di $G_{n,t}$ e delle differenze (35), (40) o (42) siano finite e continue sono soddisfatte da sè nei casi considerati in questo capitolo, poichè si tratta sempre di somme di un numero finito di funzioni ordinarie ec.

E finalmente „ quando resti incerto se sia o nò soddisfatta „ la condizione che si aveva sopra intorno alla convergenza in „ ugual grado dell'integrale $\int_\alpha^x \varphi(x,h)\,dx$, o delle quantità $G_{n,t}$, „ (35), (40) o (42), ma si sappia però che, esclusi dall'inter- „ vallo che si considera con altrettanti intorni comunque piccoli „ un numero finito di punti speciali $p_1, p_2, .., p_m$, negli inter- „ valli restanti sia soddisfatta la condizione della indicata con- „ vergenza in ugual grado; allora, tenendo ferme per questi in- „ tervalli le altre condizioni, basterà verificare che negli intorni „ a destra e negli intorni a sinistra degli stessi punti $p_1, p_2, .., p_m$ „ l'integrale medesimo $\int_\alpha^x \varphi(x,h)dx$ o le quantità $G_{n,t}$, (35), (40) „ o (42) sono sempre numericamente inferiori a un numero finito

„ A (qualunque sia n) e la funzione $f(x)$ o $f(\alpha+t)$ soddisfa „ alle condizioni a) o b), o all'altra che la somma delle oscil- „ lazioni corrispondenti agli intervalli nei quali si scompon- „ gono quelli intorni può rendersi piccola quanto si vuole „ prendendo sufficientemente piccoli i medesimi intorni „.

Si osservi infatti che se $(p_1-\varepsilon_1, p_1)$ è uno dei detti intorni, e in esso $f(x)$ soddisfa alla condizione b), la quantità $f(p_1-0)$ avrà un significato (m. l. §§. 235. e seg.), e indicando con $\theta(x)$ l'integrale $\int_{p_1-\varepsilon_1}^{x} \varphi(x,h)\,dx$ si avrà la formola:

$$\int_{p_1-\varepsilon_1}^{p_1} f(x)\,\varphi(x,h)\,dx = f(p_1-0)\int_{p_1-\varepsilon_1}^{p_1} \varphi(x,h)\,dx - \int_{p_1-\varepsilon_1}^{p_1} f_1(x)\,\theta(x)\,dx$$

dalla quale apparisce subito che l' integrale $\int_{\alpha}^{p_1} f(x)\,\varphi(x,h)\,dx$ ha per limite zero per $h=\infty$.

Se poi $f(x)$ soddisfa alla prima o alla terza delle condizioni suindicate, i suoi valori, per un noto teorema sui limiti (m. l. §. 22), avranno ancora un limite determinato $f(p_1-0)$ per $x=p_1-0$ (per modo cioè che $f(x)$ nel punto p_1 a sinistra non verrà ad avere discontinuità di seconda specie); e oltre ad aversi:

$$\int_{p_1-\varepsilon_1}^{p_1} f(x)\,\varphi(x,h)\,dx = f(p_1-0)\int_{p_1-\varepsilon_1}^{p_1} \varphi(x,h)\,dx + \int_{p_1-\varepsilon_1}^{p_1} [f(x)-f(p_1-0)]\,\varphi(x,h)\,dx,$$

sarà:

$$\text{val. ass.} \int_{p_1-\varepsilon_1}^{p_1} [f(x)-f(p_1-0)]\,\varphi(x,h)\,dx < 2\,A\,[\lambda_0 + \Sigma D'_s],$$

essendo λ_0 il limite superiore dei valori assoluti di $f(x)-f(p_1-0)$ che sarà arbitrariamente piccolo, e D'_s le solite oscillazioni; e questo mostra appunto quanto noi abbiamo detto.

È da notare che queste ultime condizioni possono sostituirsi anche a quella che si aveva nei paragrafi precedenti rispetto ai prodotti di $f(\alpha+t)$ per $G_{n,t}$ o per le differenze (35), (40) o (42) nei punti eccezionali t negli intorni dei quali non poteva assicurarsi che le derivate di queste quantità restassero numericamente inferiori ad un numero finito.

74. Passiamo ora a fare qualche applicazione dei teoremi dimostrati.

Cerchisi perciò in primo luogo coll' applicazione del teorema del §. 64, se una funzione $f(x)$ di una variabile reale x data in un certo intervallo, pei punti α pei quali soddisfa ad alcune delle condizioni del §. 39, sia rappresentabile analiticamente mediante una serie della forma:

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_1^\infty(a_n\cos\lambda_n x+b_n\operatorname{sen}\lambda_n x),$$

essendo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ radici reali e positive della equazione trascendente $u(z)=\frac{1}{w(z)}=0$, o infiniti della funzione monodroma e continua $w(z)$, supposti al solito tutti di prim'ordine, e coi residui $c_s=\frac{1}{u'(\lambda_s)}$ pei punti λ_s; e supposto inoltre, per semplicità, che $w(z)$ divenga infinita di prim' ordine e col residuo $c_0=\frac{1}{u'(0)}$ anche nel punto $z=0$, e che oltre ai punti $0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ non vi siano altri infiniti di $w(z)$ a destra dell' asse delle y nè su quest' asse.

In questo caso avremo $m=2$, e $H_1(z, x)=\cos zx$, $H_2(z,x)=\operatorname{sen} zx$; e prendendo $F(x)=1$ e $\varphi_1(z)=\varphi_2(z)=\psi(z)$, la funzione $\varphi(z)$ del §. 64. si ridurrà a $\frac{\psi(z)\operatorname{sen} tz}{z}$, e quindi in ordine al teorema del paragrafo stesso si dovrà esaminare la differenza $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{w(z)\psi(z)\operatorname{sen} tz}{z}dz-\sum_1^{m_n}\gamma_r$, essendo γ_r i residui

della funzione sotto il segno integrale nei punti d' infinito diversi da $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$, che essa avesse entro C_n.

Si supponga ora per semplicità che $\psi(z)$ sia sempre finita a destra dell'asse delle y, e non si annulli per $z=0$, e si prenda per curva C_n un contorno a destra dell'asse delle y formato da un semicerchio di raggio piccolissimo δ descritto intorno all'origine, dalle due porzioni di asse y nei tratti da $-y_0$ a $-\delta$ e da δ a y_0, e da una linea grandissima C'_n che passi pei punti y_0 e $-y_0$ dell'asse delle y e che può essere per es. un semicerchio di raggio $\rho=y_0$, o una linea che insieme all' asse delle y forma un contorno rettangolare ec.

Così evidentemente si avrà $\sum_1^{m_n} \gamma_r=0$, e l'integrale esteso al semicerchio di raggio δ (venendo percorso nel senso inverso) sarà uguale a $-\frac{1}{2} c_0 \psi(0)\, t$, mentre quelli estesi ai due tratti $(-y_0, -\delta)$, (δ, y_0) dell' asse delle y si distruggeranno identicamente se noi ammettiamo che il prodotto $\psi(z)\, w(z)$ sull'asse delle y al cambiare di y in $-y$ muti soltanto di segno; dunque la differenza (35) si ridurrà ora all' altra

$\frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n} \frac{\psi(z)\, w(z) \operatorname{sen} tz}{z} dz - \frac{1}{2} c_0 \psi(0)\, t$ che è già indipendente da α e cangia soltanto di segno al mutare di t in $-t$; e quindi si può ora asserire che „ se, a destra dell'asse delle y e su que-
„ st'asse, $w(z)$ è una funzione di z monodroma e continua a
„ distanza finita, che sull' asse delle y diviene infinita soltanto
„ per $z=0$; e le infinite quantità reali e positive $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_n, \ldots$,
„ sono i soli infiniti che questa funzione $w(z)$ ha nella stessa
„ parte del piano, o sono le radici della equazione (inversa)
„ $u(z)= \frac{1}{w(z)}=0$, supposti questi infiniti come quello nel pun-
„ to $z=0$ tutti del prim' ordine, allora pei punti x di tutto o
„ parte dell' intervallo in cui è data (arbitrariamente) una
„ funzione $f(x)$ della variabile reale x, questa funzione $f(x)$
„ potrà svilupparsi nei soliti casi in serie della forma :

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{1}^{\infty}(a_n \cos\lambda_n x + b_n \operatorname{sen}\lambda_n x), \tag{45}$$

„ tutte le volte che, indicando con C'_n una linèa grandissima „ situata a destra dell' asse delle y che incontri quest'asse in „ punti simmetrici rispetto all' origine, e senza passare per „ alcun punto d'infinito di $w(z)$ formi collo stesso asse y un „ contorno chiuso che racchiuda nel suo interno i punti „ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, si potrà trovare una funzione di z monodroma „ ma e continua $\psi(z)$ che non si annulla per $z=0$ per la „ quale riescano soddisfatte le condizioni seguenti:

1.° „ che il prodotto $\psi(z)\,w(z)$ sia una funzione dispari „ di z o almeno abbia valori uguali e di segno contrario nei „ punti dell' asse y simmetrici rispetto all' origine;

2.° „ che, essendo t_0 un certo numero positivo da „ determinarsi, e ε_1 un numero pur positivo ma piccolo a „ piacere, l' integrale:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n}\frac{\psi(z)\,w(z)\operatorname{sen} tz}{z}\,dz \tag{46}$$

„ pei valori di t fra ε_1 e $2t_0$ abbia una derivata rispetto a t:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n}\psi(z)\,w(z)\cos tz\,dz \tag{47}$$

„ di cui il modulo, o anche soltanto il valore assoluto della „ parte reale o quello del coefficiente dell'immaginario, è sem- „ pre inferiore a un numero finito (dipendente da ε_1) qualunque „ sia l' ampiezza di C'_n.

3.° „ che al crescere indefinito di C'_n l' integrale stesso „ (46), o almeno la sua parte reale, o il coefficiente dell' im- „ maginario, pei valori di t fra 0 e $2t_0$ (gli estr. escl.) abbia „ per limite una funzione $\chi_1(t)$ di t che ha una derivata de- „ terminata $\chi'_1(t)$ finita per t diversa da 0 e da $2t_0$, e atta al- „ l'integrazione fra 0 e $2t_0$; e $\chi_1(+0)$ sia diverso da zero.

4.° „ che indicando con $\chi(n,t)$ l'integrale (46) o la part

„ reale o il coefficiente dell'immaginario di questo integrale a seconda del significato di $\chi_1(t)$, la quantità $\chi_1(+0)-\chi_1(t)+\chi(n,t)$ „ che ora corrisponde alla $G_{n,t}$, o la sua derivata rispetto a t „ soddisfi alle solite condizioni dei paragrafi precedenti; talchè „ in particolare, nel caso che si considerino soltanto i punti „ x negli intorni dei quali la funzione non fà infinite oscil- „ lazioni o ammette una derivata che resta atta alla integarzione „ anche ridotta ai suoi valori assoluti, basta che la quantità „ precedente per t compreso fra 0 e ε resti sempre numerica- „ mente inferiore a un numero finito „.

Al solito poi se per un numero finito di valori α_1, α_2, . . , di t fra ε_1 e $2\,t_0-\varepsilon_1$ la condizione seconda non sarà soddisfatta o si sarà incerti, allora negli intorni a destra e a sinistra di questi valori di t il prodotto di $f(\alpha+t)$ per l' integrale (47) dovrà soddisfare alla solita condizione posta in fine del §. 57, o a quella posta nel §. 73: e in questo caso non occorrerà fare le altre verificazioni pei valori di t negli intorni degli indicati punti eccezionali α_1, α_2 . . .

E se invece che per un numero finito di valori di t fra ε_1 e $2\,t_0-\varepsilon_1$ la condizione seconda non sarà soddisfatta mai in alcune porzioni finite dell' intervallo stesso (ε_1, $2\,t_0-\varepsilon_1$) o in tutto l'intervallo, o si sarà incerti, allora dietro quanto si disse al §. 72. basterà che si sappia che al crescere indefinito di C'_n l' integrale (46) (o almeno la sua parte reale o il coefficiente dell' immaginario) converge in ugual grado verso il suo limite $\chi_1(t)$ per t compreso nelle dette porzioni, e al tempo stesso $f(\alpha+t)$ nelle varie parti (in numero finito) in cui supporremo scomporsi le porzioni medesime soddisfa ad una almeno delle condizioni a), b), c) dello stesso paragrafo 72. E quando vi restino incertezze per un numero finito di punti come al §. 73, allora negli intorni a destra e a sinistra di questi punti dovranno verificarsi le condizioni poste nello stesso §. 73.

L'intervallo poi, ove cadono i punti x ai quali nei soliti casi sarà applicabile lo sviluppo (45) risulterà di ampiezza $2\,t_0$, e potrà essere quello da $-t_0$ a t_0; questo numero t_0 dipendendo dalla natura dello sviluppo (o della equazione $u(z)=0$)

e non già dalla funzione da svilupparsi $f(x)$; per modochè, se $f(x)$ fosse data in un intervallo minore di $2\,t_0$, si potrebbe intendere continuata con una funzione qualsiasi finita e atta alla integrazione in tutta la porzione rimanente dell' intervallo $2\,t_0$, e in particolare potrebbe intendersi continuata con una funzione nulla in ogni punto di questa porzione, con chè si otterrebbe che gli integrali che figurano nei coefficienti della serie fossero estesi all' intervallo soltanto in cui la funzione $f(x)$ è data originariamente. — Del resto poi nei casi in cui l' intervallo $(a\,,b)$ nel quale è data $f(x)$ non è quello da $-t_0$ a t_0, potremo sempre intenderlo ridotto a questo col cambiamento della variabile x in un altra y mediante la relazione lineare $y=\frac{2\,t_0}{b-a}\,x-\frac{t_0(b+a)}{b-a}=\frac{t_0(2\,x-b-a)}{b-a}$, analogamente a quanto si fece pel caso della serie di Fourier al §. 49.

Si aggiunge inoltre che siccome l' integrale (47), come anche evidentemente la quantità $\chi'_1(t)$, non mutano al cangiare di t in $-t$, accadrà lo stesso di $\varphi(t,\alpha,h_0)$; e quindi, secondo quanto si disse in fine del §. 53, perchè sia applicabile a $f(x)$ in un punto x lo sviluppo (45) non importerà che negli intorni a destra e a sinistra di x siano soddisfatte per questa funzione $f(x)$ quelle fra le condizioni del §. 39. che vorremo applicare; ma, come nel caso degli sviluppi di Fourier, basterà che queste condizioni si trovino soddisfatte per la funzione $f(x+t)+f(x-t)$ nell' intorno del punto $t=0$, e pel valore di x che si considera.

75. Quando poi le condizioni per l' applicabilità del teorema del paragrafo precedente sono soddisfatte, allora se $c_0\,,c_1\,,c_1\,,..,c_n,..$, sono i residui di $w(z)$ nei punti $\lambda_1\,,\lambda_2\,,..,\lambda_n\,,..$, nella serie (15) o (42) si potrà prendere:

$$\varphi(t\,,\alpha\,,h_0)=-\chi'_1(t)+\frac{1}{2}\,c_0\,\psi(0)\,,\ \mathrm{G}=\chi_1(+0),\,p_{n,s}=c_n\,\psi(\lambda_n),$$

$$a_0=-\frac{1}{\chi_1(+0)}\int_{-t_0}^{t_0}\left\{\chi'_1(x-\alpha)-\frac{1}{2}\,c_0\,\psi(0)\right\}f(x)\,dx\,,$$

$$a_n=\frac{c_n\,\psi(\lambda_n)}{2\chi_1(+0)}\int_{-t_0}^{t_0}f(x)\cos\lambda_n\,x\,d\,x,\quad b_n=\frac{c_n\,\psi(\lambda_n)}{2\chi_1(+0)}\int_{-t_0}^{t_0}f(x)\,\mathrm{sen}\,\lambda_n\,xd\,x,$$

ove in queste formole e nelle seguenti di $\chi_1(t)$, $c_0\,\psi(0)$ e $c_n\,\psi(\lambda_n)$, se sono complessi, s' intende che debba prendersi soltanto la parte reale o il coefficiente dell'immaginario; e inoltre in questo caso sarà:

$$\varphi(t\,,\alpha\,,h_n) = -\chi'_1(t) + \frac{1}{2}\,c_0\,\psi(0) + \sum_1^n c_r\,\psi(\lambda_r)\cos\lambda_r t =$$

$$= -\chi'_1(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n}\psi(z)w(z)\cos tz\,dz\,;$$

e talvolta le condizioni che figurano nell' enunciato del teorema precedente, anzichè studiarle sugl' integrali (47) o (46), tornerà meglio di studiarle respettivamente sulle espressioni:

$$(48)\qquad -\chi'_1(t) + \frac{1}{2}\,c_0\,\psi(0) + \sum_1^n c_r\,\psi(\lambda_r)\cos\lambda_r\,t\,,$$

$$(49)\qquad \chi_1(+0) - \chi_1(t) + \frac{1}{2}\,c_0\,\psi(0)\,t + \sum_1^n c_r\,\psi(\lambda_r)\,\frac{\operatorname{sen}\lambda_r\,t}{\lambda_r}\,,$$

delle quali (fermo stante il significato che abbiamo detto dovere attribuire a $\chi_1(t)$, $c_0\psi(0)$, e $c_r\,\psi(\lambda_r)$ se sono complesse) la prima rappresenta $\varphi\,(t, \alpha\,, h_n)$ e la seconda il suo integrale rispetto a t, cioè $\int_0^t \varphi(t\,,\alpha\,,h_n)\,dt$.

E se, come notammo in generale, le quantità $c_0\psi(0)\,, c_n\psi(\lambda_n)$ saranno reali, allora tutte le espressioni precedenti saranno pure reali, e le parti immaginarie che vi comparissero dovranno distruggersi identicamente, e quindi potranno anche tralasciarsi senz' altro.

Per la condizione 3.ª poi, o per quanto fu detto in generale al §. 71. si avrà la formola notevole:

$$(50) \qquad \chi_1(t) = \frac{1}{2} c_0 \psi(0)\, t + \sum_1^{\infty} c_n \psi(\lambda_n) \frac{\operatorname{sen} \lambda_n t}{\lambda_n} ,$$

che varrà per t diverso da zero e compreso fra 0 e 2π (2π al più escl.).

76. È poi da osservare che le verificazioni sugli integrali (46) o (47) si faranno con molta facilità quando la funzione sotto l'integrale possa porsi sotto la forma $P(t, z) + A(t, z)$ ove $P(t, z)$ e $A(t, z)$ hanno le proprietà indicate nel §. 67; e allora se $P(t, z)$ sarà per es. una funzione dispari di z, siccome l'integrale $\frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n} P(t, z)\, dz$ insieme a quello uguale esteso alla linea C''_n simmetrica a C'_n corrisponde precisamente alla somma $\Sigma\, b_r$ dei residui relativi ai punti d' infinito di $P(t, z)$ che cadono entro la linea $C'_n + C''_n$, sarà evidentemente $\frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n} P(t, z)\, d z = \frac{1}{2} \Sigma b_r$, qualunque sia la linea C'_n; talchè allora l' esame dell' integrale corrispondente (46) o (47) si ridurrà a quello della somma $\frac{1}{2} \Sigma\, b_r + \int_{C'_n} A(t, z)\, d z$.

77. Oltre a questo giova osservare che se $\chi'_1(t)$ non diviene infinito col tendere a zero di t, a causa delle proprietà che hanno le funzioni $\varphi(t, \alpha, h_n)$, la somma $\sum_1^n c_r \psi(\lambda_r) \cos\lambda_r t$ che figura nella (48) considerata al limite per $t=0$ deve crescere indefinitamente con n, e quindi il prodotto $c_r \psi(\lambda_r)$, o quella parte di esso $[c_r \psi(\lambda_r)]_0$ che dicemmo dovere soltanto considerare, al crescere indefinito di λ_r non potrà mai divenire infinitesimo di un ordine determinato superiore al primo $1+\mu$ rispetto a $\frac{1}{n}$.

E poichè $c_r \psi(\lambda_r) = \left[\frac{\psi z)}{u'(z)}\right]_{\lambda_r}$, risulta intanto di quì che la

funzione $\frac{\psi(z)}{u'(z)}$ non potrà all' infinito divenire infinitesima di ordine determinato superiore al primo.

Inoltre, siccome la somma (49), che rappresenta l' integrale $\int_0^t \varphi(t, \alpha, h_n)\, dt$, al limite per $n=\infty$ si riduce a una serie che per $t=0$ è identicamente nulla, e pei valori positivi di t fra 0 e $2t_0$ ha un valore fisso diverso da zero, è chiaro che la serie $\sum_1^\infty c_r \psi(\lambda_r) \frac{\operatorname{sen} \lambda_r t}{\lambda_r}$ dovrà essere discontinua per $t=0$, e quindi il prodotto $c_r \psi(\lambda_r)$ non potrà divenire infinitesimo con $\frac{1}{\lambda_r}$ o $\frac{1}{n}$ neppure di un ordine determinato μ piccolo a piacere; ciò che porta evidentemente che la funzione $\frac{\psi(z)}{u'(z)}$ non potrà restare monodroma finita e continua all' infinito senza essere della forma $A + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \ldots$ ove $A, A_1, A_2, \ldots$, sono quantità costanti, e A è diverso da zero.

S' intende che queste osservazioni potranno essere utili per la determinazione della funzione $\psi(z)$; e anzi di quì risulta che in primo luogo per $\psi(z)$ sarà da provarsi la funzione $\psi(z)=A\, u'(z)$ con A reale; e allora si avrà $c_0\, \psi(0) = c_r\, \psi(\lambda_r) = A$, e tutte le espressioni precedenti, e quindi anche in particolare gli integrali (46) e (47) verranno reali, e se le condizioni del teorema precedente saranno soddisfatte, la somma (48) che ora rappresenta la funzione $\varphi(t, \alpha, h_n)$ si ridurrà a $-\chi'_1(t) + A\left[\frac{1}{2} + \sum_1^n \cos \lambda_r t\right]$, e per $t=0$ sarà uguale a $-\chi'_1(+0) + \frac{2n+1}{2} A$; e inoltre dalla formola (50) avremo l' altra:

$$\frac{\chi_1(t)}{A} = \frac{t}{2} + \sum_1^\infty \frac{\operatorname{sen} \lambda_n t}{\lambda_n},$$

che varrà per t diverso da zero e compreso fra 0 e 2π (2π al più escl.).

78. Faremo poi altre osservazioni che talvolta potranno riescire utili per la determinazione della funzione $\psi(z)$; ma prima giova applicare i risultati precedenti al caso in cui essendo $w(z)=\frac{1}{\operatorname{sen}\pi z}$, cioè essendo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ i numeri naturali $1, 2, 3, \ldots, n \ldots$, lo sviluppo (45) si riduce allo sviluppo di Fourier.

Per questo osserviamo che, essendo ora $u(z)=\operatorname{sen}\pi z$, se si prende $\psi(z)=\frac{u'(z)}{\pi}$, o $\psi(z)=\cos\pi z$, le a_n e b_n si riducono a quelle che figurano nella serie di Fourier all' infuori per ora del divisore $2\chi_1(+0)$ che poi vedremo essere uguale all'unità; e gli integrali (46) e (47) divengono:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n}\frac{\cos\pi z\operatorname{sen}tz}{z\operatorname{sen}\pi z}dz\,,\quad \frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n}\frac{\cos\pi z\cos tz}{\operatorname{sen}\pi z}dz\,,$$

talchè tutto si riduce all' esame di questi due integrali nei quali l' immaginario non figurerà che apparentemente.

Ora, avendosi:

$$\cos\pi z\operatorname{sen}tz=\operatorname{sen}\pi z\cos tz+\operatorname{sen}(t-\pi)z\,,$$

la funzione sotto il primo integrale diviene $\frac{\cos tz}{z}+\frac{\operatorname{sen}(t-\pi)z}{z\operatorname{sen}\pi z}$, e la prima parte figura come la funzione $P(t, z)$ del §. 76, e diviene infinita soltanto per $z=0$ col residuo uguale ad uno, talchè l' integrale $\frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n}\frac{\cos tz}{z}dz$ ha per valore $\frac{1}{2}$; mentre per la seconda parte sarà facile vedere che essa figura come la funzione $A(t, z)$ dello stesso §. 76, o del §. 67.

Intanto dunque si ha:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n}\frac{\cos\pi z\operatorname{sen}tz}{z\operatorname{sen}\pi z}dz=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n}\frac{\operatorname{sen}(t-\pi)z}{z\operatorname{sen}\pi z}dz,$$

e derivando rapporto a t si ottiene:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n}\frac{\cos\pi z\cos tz}{\operatorname{sen}\pi z}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n}\frac{\cos(t-\pi)z}{\operatorname{sen}\pi z}dz\,;$$

e se, come appunto vedremo, l'integrale $\int_{C'_n}\frac{\operatorname{sen}(t-\pi)z}{z\operatorname{sen}\pi z}dz$ per t compreso fra 0 e $2t_0$ ha per limite zero, si potrà dire che $\chi_1(t)=\frac{1}{2}$, e:

$$\varphi(t,\alpha,h_n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n}\frac{\cos\pi z\cos tz}{\operatorname{sen}\pi z}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n}\frac{\cos(t-\pi)z}{\operatorname{sen}\pi z}dz\,,$$

$$\int_0^t\varphi(t,\alpha,h_n)dt=\frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n}\frac{\cos\pi z\operatorname{sen}tz}{z\operatorname{sen}\pi z}dz=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n}\frac{\operatorname{sen}(t-\pi)z}{z\operatorname{sen}\pi z}dz;$$

e allora basterà studiare i due integrali degli ultimi membri; e propriamente quando fosse soltanto dimostrato che $\chi_1(t)=\frac{1}{2}$, siccome valendosi della espressione (48) si troverebbe come nel caso di Fourier $\varphi(t,\alpha,h_n)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_1^n\cos rt\right)=\frac{\operatorname{sen}\frac{(2n+1)t}{2}}{2\pi\operatorname{sen}\frac{t}{2}}$,

non occorrerebbe fare altre verificazioni per potere assicurare che lo sviluppo di Fourier sussiste in tutti i casi del §. 44.

79. Noi però vogliamo fare queste verificazioni sugli integrali precedenti, per accennare al modo da tenersi quando si vogliono applicare i teoremi generali che abbiamo dato, e perchè questo ci sarà utile per gli studî successivi.

Si prenda perciò per linea C'_n la porzione di rettangolo formato da un lato parallelo all' asse dell' y e distante da quest' asse di una quantità k compresa fra n e $n+1$ (n e $n+1$ escl.), e da due lati paralleli all'asse delle x, uno sopra e l'altro sotto a quest' asse, alla distanza y_0 da esso.

Con questa linea C'_n si avrà in generale per una funzione qualsiasi $\theta(z)$:

$$\int_{C'_n}\theta(z)dz=\int_0^k\theta(x-iy_0)dx+i\int_{-y_0}^{y_0}\theta(k+iy)\,dy-\int_0^k\theta(x+iy_0)\,d\,x\,,$$

e se avverrà che, lasciando fermo il k, e facendo crescere y_0 indefinitamente le funzioni $\theta(x-i\,y_0)$ e $\theta(x+i\,y_0)$, o almeno la loro differenza, finiscano per avere un modulo che per ogni valoro maggiore di y_0 e per qualsiasi valore di x fra 0 e k è sempre inferiore a quel numero che più ci piace, allora si avrà:

$$\int_{C'_n}\theta(z)\,d\,z=\lim_{y_0=\infty}i\int_{-y_0}^{y_0}\theta(k+i\,y)\,d\,y\,,$$

e si potrà anche scrivere:

$$\int_{C'_n}\theta(z)\,d\,t=\int_{-\infty}^{\infty}\theta(k+i\,y)\,d\,y\,,$$

tutte le volte che l' integrale del secondo membro avrà un significato determinato.

Ora, avendosi in generale

$$\operatorname{sen}(\alpha+i\,\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cosh\beta+i\cos\alpha\operatorname{senh}\beta\,,$$
$$\cos(\alpha+i\,\beta)=\cos\alpha\cosh\beta-i\operatorname{sen}\alpha\operatorname{senh}\beta\,,$$

ove cosh e senh indicano le solite funzioni iperboliche, basta ricordare le espressioni di queste funzioni per esponenziali per riconoscer subito che quando t è diverso da 0 e da 2π le funzioni $\frac{\operatorname{sen}(t-\pi)\,z}{z\operatorname{sen}\pi\,z}$, e $\frac{\cos(t-\pi)\,z}{\operatorname{sen}\pi\,z}$ soddisfano alle condizioni ora indicate per la $\theta(z)$; quindi sarà anche:

$$\varphi(t,\alpha,h_n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(t-\pi)\,k\cosh(t-\pi)y-i\operatorname{sen}(t-\pi)k\operatorname{senh}(t-\pi)y}{\operatorname{sen}\pi k\cosh\pi y+i\cos\pi k\operatorname{senh}\pi y}dy\,,$$

$$\int_0^t\varphi(t,\alpha,h_n)dt=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(t-\pi)k\cosh(t-\pi)y+i\cos(t-\pi)k\operatorname{senh}\pi y}{\operatorname{sen}\pi\,k\cosh\pi\,y+i\cos\pi\,k\operatorname{senh}\pi\,y}\frac{dy}{k+iy}$$

e se si osserva che quando nella porzione di rettangolo C'_n si muta il lato parallelo all'asse y in modo che la sua distanza da quest'asse resti sempre compresa fra n e $n+1$, (n, e $n+1$ escl.) lo spazio che resta compreso fra questi lati non contiene singolarità delle funzioni che figurano sotto gli integrali $\int_{C'_n}$, si vede subito che questi integrali e in conseguenza anche i due delle formole precedenti restano invariati, per modo che queste sono funzioni determinate di k fra n e $n+1$ (n e $n+1$ escl.) che conservano sempre lo stesso valore.

Segue da ciò che senza cambiare i valori degli integrali che compariscono nelle formole precedenti, si può fare senz'altro $k=n+\frac{1}{2}$, e quindi si ha;

$$\varphi(t,\alpha,h_n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} t k \cosh(t-\pi)y+i\cos t k \operatorname{senh}(t-\pi)y}{\cosh \pi y}dy,$$

$$\int_0^t\varphi(t,\alpha,h_n)dt=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-\cos tk\cosh(t-\pi)y+i\operatorname{sen} tk\operatorname{senh}(t-\pi)y}{\cosh \pi y}\frac{dy}{k+iy};$$

talchè osservando che i moduli delle funzioni sotto i segni integrali sono respettivamente $\frac{\sqrt{\operatorname{sen}^2 t k+\operatorname{senh}^2(t-\pi)y}}{\cosh \pi y}$, e $\frac{\sqrt{\cos^2 t k+\operatorname{senh}^2(t-\pi)y}}{\sqrt{k^2+y^2}\cosh \pi y}$ e quindi non sono superiori a $\frac{\cosh(t-\pi)y}{\cosh \pi y}$, $\frac{1}{k}\frac{\cosh(t-\pi)y}{\cosh \pi y}$ si vede intanto che fra ε e $2\pi-\varepsilon$ la funzione $\varphi(t,\alpha,h_n)$ è sempre inferiore a un numero finito (variabile con ε) qualunque sia n, e l'integrale $\int_0^t\varphi(t,\alpha,h_n)\,dt$ ha per limite $\frac{1}{2}$ per $n=\infty$ qualunque sia t purchè compreso fra 0 e 2π (0 e 2π escl.).

Osserviamo inoltre che se nelle funzioni sotto i segni integrali precedenti si separano le parti reali e le parti immaginarie, (moltiplicando per questo e dividendo per $k-iy$ quella sotto il secondo integrale) si trova che, come appunto doveva essere, gli integrali estesi alle parti immaginarie sono identicamente nulli perchè esse sono funzioni dispari di y, e quindi si ha anche: (*)

$$\varphi(t,\alpha,h_n)=\frac{\operatorname{sen} t k}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cosh (t-\pi) y}{\cosh \pi y} d y,$$

$$\int_0^t \varphi(t,\alpha,h_n)dt=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{-k\cos tk \cosh(t-\pi)y+y \operatorname{sen} tk \operatorname{senh}(t-\pi)y}{(k^2+y^2)\cosh \pi y}dy;$$

e siccome l'integrale che comparisce in $\varphi(t,\alpha,h_n)$ è evidentemente positivo e al crescere di t da 0 a π và sempre diminuendo, oltre di veder chiaro di quì che $\varphi(t,\alpha,h_n)$ si annulla cangiando di segno nei punti $0, \frac{\pi}{k}, \frac{2\pi}{k},\ldots$, si riscontra altresì che i massimi successivi dell'integrale $\int_0^t \varphi(t,\alpha,h_n)\,dt$ fra 0 e π sono nei punti $\frac{\pi}{k}, \frac{3\pi}{k},\ldots$, e sono positivi e vanno decrescendo, mentre i minimi sono pure positivi e sono nei punti 0, $\frac{2\pi}{k}, \frac{4\pi}{k},\ldots$ e vanno crescendo; e fra π e 2π si ripete lo stesso, ma simmetricamente rispetto al punto π.

(*) Siccome per altra via già sappiamo che per la serie di Fourier e con $k=n+\frac{1}{2}$ si ha $\varphi(t,\alpha,h_n)=\frac{\operatorname{sen} t k}{2\pi \operatorname{sen}\frac{t}{2}}$ noi possiamo dire evidentemente che sarà

$$\frac{1}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}=\int_0^\infty\frac{\cosh (t-\pi) y}{\cosh \pi y}dy.$$

Da ciò risulterà che il massimo valore dell' integrale

$\int_0^t \varphi(t,\alpha,h_n)dt$ per t fra 0 e π sarà $\int_0^{\frac{\pi}{k}} \varphi(t,\alpha,h_n)dt$, ossia

$\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{k\cosh\left(1-\frac{1}{k}\right)\pi y}{\cosh \pi y}\frac{dy}{k^2+y^2}$, e quindi sarà inferiore a $\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{k\,dy}{k^2+y^2}$, o a $\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{k}\right)_0^\infty$ cioè ad 1; donde apparisce intanto che per tutti i valori di t fra 0 e π l'integrale $\int_0^t \varphi(t,\alpha,h_n)dt$ è sempre inferiore all' unità.

Osservando infine che cambiando y in $\frac{y}{t}$ e ponendo $\frac{\pi}{t}=a$ si ha:

$$\varphi(t,\alpha,h_n)=\frac{\operatorname{sen} t\,k}{t\,\pi}\int_0^\infty \frac{\cosh(a-1)\,y}{\cosh a\,y}dy=\frac{\operatorname{sen} t\,k}{t\,\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-y}+e^{-(2a-1)y}}{1+e^{-2ay}}dy,$$

se ne deduce che per t fra 0 e 2π sarà:

$$t\varphi(t,\alpha,h_n)<\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left(e^{-y}+e^{-(2a-1)y}\right)dy\ ,\ \text{o}\ t\varphi(t,\alpha,h_n)<\frac{1}{\pi}\left(1+\frac{1}{2a-1}\right),$$

e quindi il prodotto $t\varphi(t,\alpha,h_n)$ col tendere a zero di t resta sempre numericamente inferiore a un numero finito e considerato per ogni valore speciale di k ha per limite zero per $t=0$; dunque, quando t è fra 0 e 2π, per l'attuale funzione $\varphi(t,\alpha,h_n)$ sono soddisfatte tutte le condizioni che si avevano per la funzione $\varphi(x,h)$ del §. 32, e evidentemente pel valore $t=2\pi$ essa si comporta come per $t=0$; e questo basta per assicurare

nuovamente che lo sviluppo di Fourier è possibile in tutti i casi del §. 44. colle solite condizioni rispetto ai punti di discontinuità e ai punti estremi.

80. Prima di applicare il teorema del §. 74. alla ricerca di altri sviluppi della forma (45) per le funzioni di una variabile reale, serviamoci dei risultati del paragrafo precedente per fare un altra osservazione che in certi casi sarà ancora di guida per la determinazione della funzione $\psi(z)$.

Osserviamo cioè, che avendo dimostrato che l' integrale $\frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n} \frac{\cos\pi z \operatorname{sen} t z}{z \operatorname{sen}\pi z} d z$ al crescere indefinito della linea C'_n ha per limite $\frac{1}{2}$ quando t è fra 0 e 2π (0 e 2π escl.) e C'_n è una porzione di rettangolo, accadrà lo stesso se C'_n è un altra linea qualunque che parte da due punti dell'asse y simmetrici rispetto all'origine e traversa l'asse x a una distanza dall' origine compresa fra n e $n+1$; e se ammettiamo di essere nel caso in cui l' integrale $\frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n} \frac{\psi(z)\, w(z) \operatorname{sen} t z}{z} d z$ considerato al §. 74. ha un limite determinato per $n=\infty$, e indichiamo con $\chi_1(t)$ questo limite, si vede subito che avendosi:

$$\lim \frac{\chi_1(t)}{2\pi i}\int_{C'_n} \frac{\cos\pi z \operatorname{sen} t z}{z \operatorname{sen}\pi z} d z = \frac{\chi_1(t)}{2},$$

l' integrale:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n} \left\{ \psi(z)\, w(z) - 2\chi_1(t)\frac{\cos\pi z}{\operatorname{sen}\pi z}\right\} \frac{\operatorname{sen} t z}{z} d z,$$

avrà per limite lo zero quando t è fra 0 e 2π (2π al più escl.).

Osservando dunque che per $z=x+i y$, si ha:

$$\frac{\operatorname{sen} t z}{z} = \frac{\operatorname{sen} t x \cosh t y + i \cos t x \operatorname{senh} t y}{x+i y},$$

si vede chiaro che, almeno nei casi ordinarii, al crescere indefinito di y la funzione $\psi(z)w(z) - 2\chi_1(t)\frac{\cos\pi z}{\operatorname{sen}\pi z}$, considerata per ogni valore speciale di t fra 0 e 2π (0 e 2π al più escl.) deve tendere a zero; e siccome per y positivo il quoziente $\frac{\cos\pi z}{\operatorname{sen}\pi z}$ tende verso $-i$, e per y negativo tende invece verso $+i$, così la funzione $\psi(z)w(z)+2i\chi_1(t)$ per y crescente all'infinito dalla parte positiva, e l'altra $\psi(z)w(z) - 2i\chi_1(t)$ per y crescente indefinitamente dalla parte negativa devono tendere ambedue a zero per ogni valore di t fra 0 e 2π (0 e 2π al più escl.).

Questo evidentemente (per essere $\psi(z)w(z)$ indipendente da t) porta che $\chi_1(t)$ debba ordinariamente essere una costante diversa da zero $A = \chi_1(+0)$, e questa costante col mutare proporzionalmente il $\psi(z)$ (cambiando cioè $\psi(z)$ in $\frac{\psi(z)}{2A}$) può sempre intendersi ridotta uguale ad $\frac{1}{2}$; quindi almeno al crescere indefinito di y la funzione $\psi(z)w(z)$ deve ordinariamente potersi ridurre della forma $\frac{\cos\pi z}{\operatorname{sen}\pi z}+\theta(z)$, essendo $\theta(z)$ una funzione che è zero, o tende a zero al crescere indefinito di y come le esponenziali con esponente negativo, e in modo che tenda a zero anche il prodotto $\theta(z)\operatorname{sen} tz$; e allora il numero t_0 dipenderà da queste esponenziali; e evidentemente questa funzione $\theta(z)$ per $z=iy$, e $z=-iy$ dovrà avere valori uguali e di segno contrario come accade di $\psi(z)w(z)$ e di $\frac{\cos\pi z}{\operatorname{sen}\pi z}$.

Quando poi con una funzione conveniente $\psi(z)$ si trovi effettivamente per $\psi(z)w(z)$ la forma ora indicata, allora essendo:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n}\frac{\psi(z)w(z)\operatorname{sen} tz}{z}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n}\frac{\cos\pi z\operatorname{sen} tz}{z\operatorname{sen}\pi z}dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n}\frac{\theta(z)\operatorname{sen} tz}{z}dz,$$

basterà prendere per C'_n il solito contorno rettangolare per trovare:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n}\frac{\psi(z)\,w(z)\,\mathrm{sen}\,tz}{z}dz=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}\,[(t-\pi)\,(k+iy)]}{(k+iy)\mathrm{sen}[\pi(k+iy)]}dy+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\theta(k_1+iy)\frac{\mathrm{sen}\,t(k_1+iy)}{k_1+iy}dy$$

ove k_1 è fratto e compreso fra λ_n e λ_{n+1}, e $k=p+\frac{1}{2}$, essendo p l'ultimo numero intero che non supera k_1; e se l'ultimo integrale avrà per limite zero, allora $\chi_1(t)$ verrà effettivamente uguale ad $\frac{1}{2}$ e le altre verificazioni da farsi sugli integrali (46) o (47), all'infuori di quella che abbiamo fatta nel caso precedente rispetto ai massimi e minimi dell' integrale (46) e per la quale dovrà ora studiarsi tutto il secondo membro della formola precedente, si ridurranno a verificazioni analoghe sui due integrali:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\theta(k_1+i\,y)\,\mathrm{sen}\,t\,(k_1+i\,y)\,d\,y}{y}\,,\quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\theta(k_1+iy)\cos t(k_1+iy)dy;$$

e essendo ora $\chi_1(t)$ un numero reale, nelle formole del §. 74. dovremo intendere prese per $c_0\,\psi(0)$ e $c_n\,\psi(\lambda_n)$ le loro parti reali soltanto.

81. Premessa la osservazione precedente, passiamo a fare una seconda applica zione del teorema del §. 74. al caso degli sviluppi della forma:

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{1}^{\infty}\left(a_n\cos\lambda_n x+b_n\,\mathrm{sen}\,\lambda_n x\right),$$

nella ipotesi che $0\,,\lambda_1\,,\lambda_2\,,\lambda_n\,,\ldots$, siano le radici positive supposte tutte del primo ordine della equazione:

$$\mathrm{F}(z)\cos\pi z+\mathrm{F}_1(z)\,\mathrm{sen}\,\pi z=0,$$

ove si suppone che $F(z)$ e $F_1(z)$ siano funzioni di z monodrome e continue a distanza finita, delle quali una è pari, e l'altra è dispari, o almeno per $z=iy$ e $z=-iy$ una di esse prende gli stessi valori e l'altra prende valori uguali e di segno contrario; e si suppone inoltre che a destra dell'asse delle y o su quest'asse non vi siano altre radici della stessa equazione, e $F(z)$ e $F_1(z)$ coll'introduzione o colla soppressione di fattori adattati siano ridotte in modo che non divengano infinite nei punti $0, \lambda_1, \lambda_2, .. \lambda_n, ..$

Si avrà:

$$w(z)=\frac{1}{u(z)}=\frac{1}{F(z)\cos\pi z+F_1(z)\operatorname{sen}\pi z},\quad c_0=\frac{1}{F'(0)+\pi F_1(0)},$$

$$c_n=\frac{1}{F'(\lambda_n)\cos\pi\lambda_n+F'_1(\lambda_n)\operatorname{sen}\pi\lambda_n-\pi F(\lambda_n)\operatorname{sen}\pi\lambda_n+\pi F_1(\lambda_n)\cos\pi\lambda_n},$$

e volendo cercare di valersi della osservazione precedente, sarà ora naturale di provare per $\psi(z)$ una funzione della forma $M\cos\pi z+N\operatorname{sen}\pi z$, ove M ed N sono funzioni da determinarsi in modo che non divengano infinite nei punti $0, \lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n, ..$, e che il prodotto $\psi(z)\,w(z)$ venga della forma $\frac{\cos\pi z}{\operatorname{sen}\pi z}+\theta(z)$, ove $\theta(z)$ ha il significato del paragrafo precedente.

Sarà allora:

$$\theta(z)=\frac{M\cos\pi z+N\operatorname{sen}\pi z}{F\cos\pi z+F_1\operatorname{sen}\pi z}-\frac{\cos\pi z}{\operatorname{sen}\pi z}=$$

$$=\frac{(M-F_1)\cos\pi z+(N+F)\operatorname{sen}\pi z}{F\cos\pi z+F_1\operatorname{sen}\pi z}-\frac{F}{\operatorname{sen}\pi z(F\cos\pi z+F_1\operatorname{sen}\pi z)},$$

e se al crescere indefinito di y il rapporto $\frac{F_1}{F}$ non tenderà verso $+i$ per y positivo, e verso $-i$ per y negativo, un modo particolare di soddisfare alla condizione precedente sarà evidentemente quello di prendere $M=F_1$, $N=-F$, o:

$$\psi(z)=F_1\cos\pi z-F\operatorname{sen}\pi z.$$

Così facendo, e supponendo senz'altro che non sia $F(z)=0$, onde non ritornare nel caso degli sviluppi di Fourier, si avrà:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n}\frac{\psi(z)u(z)\operatorname{sen} tz}{z}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n}\frac{\cos\pi z\operatorname{sen} tz}{z\operatorname{sen}\pi z}dz-\frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n}\frac{\operatorname{sen} tz\,dz}{z\operatorname{sen}\pi z(\cos\pi z+\gamma\operatorname{sen}\pi z)},$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n}\psi(z)u(z)\cos tz\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n}\frac{\cos\pi z\cos tz}{\operatorname{sen}\pi z}dz-\frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n}\frac{\cos tz\,dz}{\operatorname{sen}\pi z(\cos\pi z+\gamma\operatorname{sen}\pi z)},$$

essendo γ il rapporto $\frac{F_1(z)}{F(z)}$; e poichè si può sempre supporre di prendere per C'_n la solita porzione di linea rettangolare che, oltre a non passare pei punti $1, 2, \ldots, n, \ldots$ dell' asse delle x, non passi neppure nei punti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$, applicando i processi del §. 79. potremo trasformare gli integrali dei secondi membri di queste formole, e troveremo così che per t fra 0 e 2π (0 e 2π al più escl.) i secondi membri medesimi sono respettivamente uguali alle seguenti quantità:

$$(51)\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{-k\cos tk\cosh(t-\pi)y+y\operatorname{sen} tk\operatorname{senh}(t-\pi)y}{(k^2+y^2)\cosh\pi y}dy-\\&\qquad\qquad-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} tz}{z\operatorname{sen}\pi z(\cos\pi z+\gamma\operatorname{sen}\pi z)}dy,\\&\frac{\operatorname{sen} tk}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cosh(t-\pi)y}{\cosh\pi y}dy-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos tz}{\operatorname{sen}\pi z(\cos\pi z+\gamma\operatorname{sen}\pi z)}dy,\end{aligned}\right.$$

intendendo che negli ultimi integrali sia $z=k_n+iy$ ove k_n è un numero positivo non intero compreso fra λ_n e λ_{n+1} (λ_n e λ_{n+1} escl.), e k è uguale a $p+\frac{1}{2}$, essendo p l'ultimo numero intero che non supera k_n.

Ora i primi integrali che compariscono in queste espressioni li studiammo già nel §. 79; tutto dunque, come già dicemmo nel paragrafo precedente, si riduce a considerare gli ultimi integrali.

Poniamo perciò $\gamma = a + i\,b$. I moduli di sen $t\,z$ e cos $t\,z$ saranno inferiori a cosh $t\,y$, e per quello M del prodotto sen πz (cos $\pi z + \gamma$ sen πz) che figura nel denominatore degli ultimi integrali, per $z = k_n + i\,y$, si avrà:

$$M^2 = (\operatorname{sen}^2 \pi k_n + \operatorname{senh}^2 \pi y \left\{ (a \operatorname{sen} \pi k_n + \cos \pi k_n)^2 - 1 + (\cosh \pi y - b \operatorname{senh} \pi y)^2 + \right.$$
$$\left. + a^2 \operatorname{senh}^2 \pi y + b^2 \operatorname{sen}^2 \pi k_n \right\} = (\operatorname{sen}^2 \pi k_n + \operatorname{senh}^2 \pi y) \left\{ (a \operatorname{sen} \pi k_n + \cos \pi k_n)^2 - \right.$$
$$\left. - b^2 \cos^2 \pi k_n + a^2 \operatorname{senh}^2 \pi y + \cosh^2 \pi y (b - \operatorname{tgh} \pi y)^2 \right\};$$

e quindi si potrà scrivere $M = \mu \cosh^2 \pi y$, ove μ è finito se tali sono a e b; dunque se questo numero μ per tutti i valori reali di y e pei valori di k_n superiori a un certo numero è sempre discosto da zero più di un certo numero determinato ν, il modulo dell' integrale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} t\,z}{z \operatorname{sen} \pi z (\cos \pi z + \gamma \operatorname{sen} \pi z)} dy$ sarà inferiore a $\frac{1}{\nu k_n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh t\,y\,dy}{\cosh^2 \pi y}$, e quello dell' altro integrale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos t\,z}{\operatorname{sen} \pi z (\cos \pi z + \gamma \operatorname{sen} \pi z)} d\,y$ sarà inferiore a $\frac{1}{\nu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh t\,y}{\cosh^2 \pi y} d\,y$.

Di quì apparisce subito che in questi casi il primo integrale pei valori di t compresi fra 0 e 2π (2π al più escl.) avrà per limite zero al crescere indefinito di λ_n, e quindi di k_n; e se ε è un numero positivo piccolo a piacere, fra 0 e $2\pi - \varepsilon$ tanto il modulo del primo integrale che quello del secondo si manterranno inferiori a un certo numero finito, e in conseguenza il prodotto di t per l' ultimo integrale tenderà a zero con t qualunque sia n; dunque evidentemente si avrà ora

$\chi_1(t) = \chi_1(+0) = G = \frac{1}{2}$, e le due espressioni (51), ove i primi integrali hanno le proprietà trovate per essi nel §. 79, e i secondi hanno quelle ora indicate, rappresenteranno respettiva-

mente le due quantità $\int_0^t \varphi(t, \alpha, h)dt$, $\varphi(t, \alpha, h_n)$; talchè noi possiamo senz' altro asserire che „ se, essendo $z=x+iy$, la equazione:

$$F(z)\cos\pi z + F_1(z)\,\text{sen}\,\pi z = 0 \tag{52}$$

„ considerata a destra dell' asse delle y o su quest' asse ha
„ soltanto per radici lo zero e le infinite quantità positive
„ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$, le quali crescono indefinitamente con n,
„ e sì esse che la radice zero sono tutte del prim' ordine; e
„ se inoltre, sempre a destra dell' asse delle y o su que-
„ st' asse, le funzioni $F(z)$ e $F_1(z)$, oltre essere monodrome e
„ continue, sono finite nei punti $0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$, e sono tali
„ altresì che per $z=iy$ e $z=-iy$ una di esse prende gli stessi
„ valori e l'altra prende valori eguali e di segno contrario, e
„ al tempo stesso per y positivo o negativo ma numerica-
„ mente maggiore di un certo numero e qualunque sia x
„ le differenze respettive $\frac{F_1(z)}{F(z)} - i$, $\frac{F_1(z)}{F(z)} + i$ hanno un mo-
„ dulo che non si accosta a zero più di una certa quantità;
„ allora, quando al crescere indefinito di λ_n si trovi sempre un
„ numero non intero k_n compreso fra λ_n e λ_{n+1} tale che, ponendo
„ il modulo del prodotto $\text{sen}\,\pi z\left(\cos\pi z + \frac{F(z)}{F_1(z)}\text{sen}\,\pi z\right)$ per
„ $z=k_n+iy$ sotto la forma $\mu\cosh^2\pi y$, il numero μ resti
„ sempre discosto da zero più di un certo numero determinato
„ ν, la funzione reale $f(x)$ data arbitrariamente nell' intervallo
„ $(-\pi, \pi)$ potrà svilupparsi secondo la serie:

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_1^{\infty}(a_n\cos\lambda_n x + b_n\,\text{sen}\,\lambda_n x) \tag{53}$$

„ per tutti i punti x dell' intervallo stesso $(-\pi, \pi)$ diversi
„ dagli estremi $\pm\pi$, negli intorni dei quali si verifica una
„ almeno delle condizioni I, e II del §. 39, o l' altra di
„ ammettere una derivata o un estremo oscillatorio che

„ resta atto alla integrazione anche ridotto ai suoi valori „ assoluti; e in questa serie i coefficienti a_0, a_n, b_n saranno „ dati dalle formole:

$$\left\{\begin{aligned} a_0 &= \left[\frac{F_1(0)}{F'(0)+\pi F_1(0)}\right]_0 \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx\,, \\ a_n &= \left[\frac{F_1(\lambda_n)\cos\pi\lambda_n - F(\lambda_n)\operatorname{sen}\pi\lambda_n}{F'(\lambda_n)\cos\pi\lambda_n + F'_1(\lambda_n)\operatorname{sen}\pi\lambda_n - \pi F(\lambda_n)\operatorname{sen}\pi\lambda_n + \pi F_1(\lambda_n)\cos\pi\lambda_n}\right]_0 \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\lambda_n x\,dx \\ b_n &= \left[\frac{F_1(\lambda_n)\cos\pi\lambda_n - F(\lambda_n)\operatorname{sen}\pi\lambda_n}{F'(\lambda_n)\cos\pi\lambda_n + F'_1(\lambda_n)\operatorname{sen}\pi\lambda_n - \pi F(\lambda_n)\operatorname{sen}\pi\lambda_n + \pi F_1(\lambda_n)\cos\pi\lambda_n}\right]_0 \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}\lambda_n x\,dx \end{aligned}\right.$$

o anche, per essere $F(\lambda_n)\cos\pi\lambda_n + F_1(\lambda_n)\operatorname{sen}\pi\lambda_n = 0$,

$$\left\{\begin{aligned} a_0 &= \left[\frac{F_1(0)}{F'(0)+\pi F_1(0)}\right]_0 \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx\,, \\ a_n &= \left[\frac{F^2(\lambda_n)+F_1^2(\lambda_n)}{F'(\lambda_n)F_1(\lambda_n) - F'_1(\lambda_n)F(\lambda_n) + \pi F^2(\lambda_n) + \pi F_1^2(\lambda_n)}\right]_0 \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\lambda_n x\,dx\,, \\ b_n &= \left[\frac{F^2(\lambda_n)+F_1^2(\lambda_n)}{F'(\lambda_n)F_1(\lambda_n) - F'_1(\lambda_n)F(\lambda_n) + \pi F^2(\lambda_n) + \pi F_1^2(\lambda_n)}\right]_0 \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}\lambda_n x\,dx\,, \end{aligned}\right.$$

„ ove le parentesi quadre indicano che delle quantità in esse „ racchiuse bisogna prendere soltanto la parte reale; per modo „ che in particolare, se $F(z)$ e $F_1(z)$ saranno reali per z reale „ positivo o nullo, i coefficienti degli integrali saranno le „ quantità fra parentesi senz' altro „.

Se poi non potremo assicurare che i numeri k_n quì indicati esistano sempre fra le radici successive λ_n e λ_{n+1}, λ_{n+1} e λ_{n+2}, . . , ma sapremo però che essi esistono per es. fra le radici λ_n e λ_{n+1}, fra le radici λ_{n+n_1} e λ_{n+n_1+1}, fra le radici $\lambda_{n+n_1+n_2}$ e $\lambda_{n+n_1+n_2+1}$, . . , allora la funzione $f(x)$ potrà ancora svilupparsi pei soliti punti x secondo la serie (53), ma bisognerà intendere che i termini di questa serie siano riuniti in gruppi corrispondenti uno alle radici $\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \ldots, \lambda_{n+n_1}$, uno alle radici $\lambda_{n+n_1+1}, \lambda_{n+n_1+2}, \ldots, \lambda_{n+n_1+n_2}$, ec.

Aggiungiamo che se $f(-x)=f(x)$ la serie (53) si riduce a una serie di soli coseni:

$$(56) \qquad \frac{1}{2} a_0 + \sum_1^\infty a_n \cos \lambda_n x,$$

ove:

$$(57) \quad \begin{cases} a_0 = 2 \left[\dfrac{F(0)}{F'(0)+F_1(0)} \right]_0 \displaystyle\int_0^\pi f(x)\, dx, \\ a_n = 2 \left[\dfrac{F^2(\lambda_n)+F_1^2(\lambda_n)}{F'(\lambda_n)F_1(\lambda_n)-F'_1(\lambda_n)F(\lambda_n)+\pi F^2(\lambda_n)+\pi F_1^2(\lambda_n)} \right]_0 \displaystyle\int_0^\pi f(x) \cos \lambda_n x\, dx \end{cases}$$

e se $f(-x) = -f(x)$ la stessa serie si riduce all' altra di soli seni:

$$(58) \qquad \sum_1^\infty b_n \operatorname{sen} \lambda_n x,$$

ove:

$$(59) \quad b_n = 2 \left[\frac{F^2(\lambda_n)+F_1^2(\lambda_n)}{F'(\lambda_n)F_1(\lambda_n)-F_1'(\lambda_n)F(\lambda_n)+\pi F^2(\lambda_n)+\pi F_1^2(\lambda_n)} \right] \int_0^\pi f(x) \operatorname{sen} \lambda_n x\, dx,$$

e queste possono quindi servire allo sviluppo per soli seni e per soli coseni di una funzione $f(x)$ data arbitrariamente fra 0 e π, ec.

Inoltre osserviamo che se $F(z)=0$ questi sviluppi si riducono a quelli di Fourier. Per essi poi le funzioni corrispondenti $\varphi(t, \alpha, h_n)$ e $\int_0^t \varphi(t, \alpha, h_n)\, dt$ sono date respettivamente, come già notammo, dalla seconda e dalla prima delle espressioni (51), e sono indipendenti da α, e a causa delle (48) e (49) possono anche porsi sotto le forme:

$$\frac{1}{2} a'_0 + \sum_1^n a'_n \cos \lambda_n t, \qquad \frac{1}{2} a'_0 t + \sum_1^n a'_n \frac{\operatorname{sen} \lambda_n t}{\lambda_n},$$

ove per semplicità di scrittura abbiamo rappresentato con a'_0 e a'_n i coefficienti degli integrali che figurano in a_0 e a_n nelle (54) e (55).

Per la (50) poi si ha la formola notevole

$$1 = a'_0 t + 2 \sum_1^{\infty} a'_n \frac{\operatorname{sen} \lambda_n t}{\lambda_n},$$

che varrà per t diverso da zero e compreso fra 0 e 2π (2π al più escl.).

82. S'intende che l'ultima condizione che figura nell'enunciato del teorema precedente sugli sviluppi (53) sarà ordinariamente conseguenza dell' ipotesi che abbiamo fatta che la equazione (52) a destra dell' asse delle y non abbia altro che radici reali.

Del resto ciò si verifica con tutta facilità nei tre casi seguenti che sono i più comuni;

1.° „ che essendo $\gamma = \frac{F_1(z)}{F(z)} = a + i b$, al crescere inde-„ finito di x per valori positivi e qualunque sia y il valore „ di a finisca per restare sempre discosto da zero più di un „ numero determinato;

2.° „ che il modulo $\sqrt{a^2+b^2}$ del rapporto γ finisca per „ restare sempre superiore all' unità più di un certo numero „ determinato;

3.° „ che se a tende a zero o almeno può accostarsi „ quanto si vuole a zero o passare per zero (senza essere nel „ caso precedente) esso non superi mai in valore assoluto „ un certo numero dato, e b resti sempre numericamente „ inferiore all' unità più di una quantità determinata „.

Indichiamo infatti con a_n il valore di a per $x = \lambda_n, y=0$, e osserviamo che per questi valori di x e y il b deve annullarsi onde λ_n possa soddisfare alla equazione (52). Si avrà;

$$\cos \pi \lambda_n + a_n \operatorname{sen} \pi \lambda_n = 0;$$

e quindi poichè non solo nel primo dei casi ora indicati,

ma anche nel secondo il valore di a_n sarà discosto da zero più di una quantità determinata, è certo che in questi due casi λ_n resterà sempre discosto più di quantità determinate dai numeri della forma $\frac{2i+1}{2}$ ove i è intero.

Allora, ammettendo che, almeno a partire da un certo valore di n, i termini della serie (53) vengano riuniti in gruppi corrispondenti alle radici λ_n che fossero comprese fra 0 e $\frac{1}{2}$, fra $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{2}$, fra $\frac{3}{2}$ e $\frac{5}{2}$, .., se si suppone che λ_n sia l'ultima radice di un gruppo e sia $\frac{2i-1}{2} < \lambda_n < \frac{2i+1}{2}$, si potrà prendere $k_n = \frac{2i+1}{2}$, e allora sarà:

$$M = \cosh^2 \pi y \sqrt{a^2 + (b - \operatorname{tgh} \pi y)^2} = \mu \cosh^2 \pi y ;$$

e quindi se, essendo nel primo caso, a partire da un certo valore x_0 di x e qualunque sia y, a sarà sempre discosto da zero in valore assoluto più di un certo numero a_1, allora per $x > x_0$ sarà $\mu > a_1$, e la condizione che figura nell' enunciato del teorema precedente rimarrà soddisfatta.

Se poi saremo nel secondo caso, e a partire da un certo valore x_0 di x e qualunque sia y, si avrà $a^2+b^2 = 1+p^2$ ove p non si accosta a zero più di un certo numero p_0, allora preso λ_n maggiore di questo valor x_0 di x, si osserverà che quando sia $b \geq 1$ potremo porre $b = \pm \sqrt{1+b_1^2}$ e quindi $a^2 = p^2 - b_1^2$, e

$$\mu = \sqrt{p^2 - b_1^2 + (\sqrt{1+b_1^2} \pm \operatorname{tgh} \pi y)^2} ;$$

e poichè il valore assoluto di $\operatorname{tgh} \pi y$ non supera l' unità, è evidente che μ non sarà inferiore a $\sqrt{p^2 - b_1^2 + (\sqrt{1+b_1^2} - 1)^2}$ ovvero a $\sqrt{p^2 + 2(1 - \sqrt{1+b_1^2})}$; e siccome, essendo $b_1^2 \leq p^2$, questa quantità non è inferiore all' altra $\sqrt{p^2 + 2(1 - \sqrt{1+p^2})}$ che è uguale a $p\sqrt{1 - \frac{2}{1+\sqrt{1+p^2}}}$, così è certo che per

$\lambda_n > x_0$ e pei valori di y pei quali $b \geq 1$ il numero μ non si accosta a zero più di $p_0 \sqrt{1 - \frac{2}{1+\sqrt{1+p^2}}}$.

Quando poi sia $b < 1$, allora evidentemente a^2 sarà maggiore di p_0^2, e μ sarà maggiore di p_0; dunque, anche nel secondo dei casi indicati sopra la condizione relativa ad M che figura nell' enunciato del teorema precedente finirà per essere sempre soddisfatta.

Passando poi al terzo caso, osserveremo che per le ipotesi che ora si ammettono sui valori di a e quindi delle a_n, alcune o tutte le quantità λ_n potranno anche accostarsi quanto si vuole a numeri della forma $\frac{2i+1}{2}$, o essere di questa forma medesima; e il ragionamento precedente non sarà più rigorosamente applicabile, sia perchè non potremo più prendere con sicurezza, per qualunque valore di n, $k_n = \frac{2i+1}{2}$, sia perchè, anche nei casi in cui ciò potrebbe farsi, M potrebbe per certi valori di n e per $y=0$ venire piccolo quanto si vuole.

Prenderemo perciò in questo caso k_n in modo che sia sen $k_n \pi = \alpha$, essendo α una quantità da determinarsi; e osserveremo che allora si ha:

$$M^2 = (\alpha^2 + \operatorname{senh}^2 \pi y)\Big\{(a\alpha + \sqrt{1-\alpha^2})^2 + b^2\alpha^2 - 1 + a^2 \operatorname{senh}^2 \pi y +$$
$$+ \cosh^2 \pi y (1 - b \operatorname{tgh} \pi y)^2\Big\} = \cosh^4 \pi y \left(1 - \frac{1-\alpha^2}{\cosh^2 \pi y}\right)\Big\{\frac{a^2\alpha^2}{\cosh^2 \pi y} -$$
$$- \frac{\alpha^2(1-b^2) - 2a\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}{\cosh^2 \pi y} + a^2 \operatorname{tgh}^2 \pi y + (1 - b \operatorname{tgh} \pi y)^2\Big\} = \mu^2 \cosh^4 \pi y,$$

e siccome in valore assoluto $\operatorname{tgh} \pi y$ non supera mai l' unità, se s'indica con α' il valore assoluto di α, e con b_0 il limite superiore dei valori assoluti che prenderà b dopo che x sarà divenuta abbastanza grande, si avrà $b_0 < 1$ e $\mu > \alpha' \sqrt{(1-b_0)^2 - c}$, ove c è il limite superiore dei valori

assoluti di $\frac{\alpha^2(1-b^2)-2\,a\,\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}{\cosh^2\pi y}$, supposto che α possa determinarsi in modo che sia $c<(1-b_0)^2$.

Ora si ha:

$$\frac{\alpha^2(1-b^2)-2\,a\,\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}{\cosh^2\pi y}=\alpha'\,\frac{\alpha'(1-b^2)\pm 2a\sqrt{1-\alpha^2}}{\cosh^2\pi y}$$

con $\alpha'=\pm\,\mathrm{sen}\,k_n\pi$, e evidentemente, se a_0 è il limite superiore dei valori assoluti di a dopo che x sarà abbastanza grande, il fattore $\frac{\alpha'(1-b^2)\pm 2\,a\sqrt{1-\alpha^2}}{\cosh^2\pi y}$ che moltiplica α', qualunque siano y e il valore che poi prenderemo per α, non sarà mai superiore a $1+2\,a_0$; dunque quando si prenda per α' un numero diverso da zero e da $\frac{(1-b_0)^2}{1+2\,a_0}$ e compreso fra questi numeri, come per es. $\alpha'=\frac{(1-b_0)^2}{2(1+2\,a_0)}$, (il che evidentemente potrà sempre farsi perchè $\left.\frac{(1-b_0)^2}{1+2\,a_0}<1\right)$ si avrà $c\leq\frac{1}{2}(1-b_0)^2$, e $\mu\geq\frac{1}{\sqrt{2}}(1-b_0)$.

Segue da ciò che anche in questo caso la condizione relativa ad M che figura nell' enunciato del teorema precedente sarà soddisfatta quando per le k_n si prendano i numeri che soddisfano alla equazione $\mathrm{sen}\,k_n\pi=\pm\alpha'$, ove α' deve determinarsi nel modo ora indicato; dunque „ quando per $F(z)$ e $F_1(z)$ si presenti uno dei tre casi 1.° 2.° e 3.° suindicati, allora senza „ stare a occuparsi della condizione che abbiamo posta nel- „ teorema precedente rispetto al modulo M del prodotto „ $\mathrm{sen}\,\pi z\left(\cos\pi z+\frac{F_1(z)}{F(z)}\,\mathrm{sen}\,\pi z\right)$, si potrà asserire che se tutte „ le altre condizioni del teorema saranno soddisfatte, lo svi- „ luppo in serie (53) sarà applicabile nei soliti casi alle funzioni „ $f(x)$ quando i termini della serie almeno a partire da un certo „ punto s'intendano riuniti in gruppi corrispondenti successi-

„ vamente alle radici $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n, ..$, che nei primi due casi „ fossero comprese fra 0 e $\frac{1}{2}$, fra $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{2}$, fra $\frac{3}{2}$ e $\frac{5}{2}$, .., e nel „ terzo fossero comprese fra 0 e k_1, fra k_1 e k_1+1, fra k_1+1 „ e k_1+2, fra k_1+2 e k_1+3, , ., essendo k_1 la più piccola „ radice positiva ρ della equazione $\operatorname{sen} x\pi = \alpha'$ o l'altra $1-\rho$ „. Spesso però questa riunione dei termini della serie in gruppi potrà farsi in più modi differenti, specialmente nel terzo caso in cui si ha una certa arbitrarietà nella determinazione del numero α.

S' intende poi che in tutti questi casi se le differenze fra le radici successive della equazione (52) finiranno per non essere mai inferiori a π, i termini della serie (53) o delle (56) o (58) potranno prendersi successivamente uno per uno senza bisogno di riunirli in gruppi convenienti.

83. Aggiungiamo che se uno almeno dei tre casi ora considerati, anzichè presentarsi soltanto per valori sufficientemente grandi di x qualunque sia y, si presenta sempre quando il modulo di z è abbastanza grande, allora evidentemente viene soddisfatta da sè anche la condizione relativa alle differenze $\frac{F_1(z)}{F(z)} \pm i = \gamma \pm i$, e quindi basta in tal caso verificare: 1.° che le funzioni $F(z)$ e $F_1(z)$ siano monodrome e continue a destra dell' asse delle y e su quest' asse, e non divengano infinite nei punti $0, \lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n, ..$; 2.° che le funzioni stesse $F(z)$ e $F(z)$ siano l' una pari e l'altra dispari o almeno si abbia $F(-iy) = \pm F(iy)$ con $F_1(-iy) = \mp F_1(iy)$, e che la equazione (52) a destra dell' asse delle y e su quest'asse non abbia altro che radici reali e del prim'ordine, e queste siano le solite quantità crescenti indefinitamente $0, \lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n, ..$

In particolare dunque, osservando che se $F(z)$ e $F_1(z)$ sono funzioni razionali intere di z delle quali la prima è dispari e la seconda è pari si ha $\lim \gamma = 0$ o $\lim \gamma = \infty$ quando $\operatorname{mod} z = \infty$, si potrà dire evidentemente che „ se $F(z)$ e $F_1(z)$ sono fun- „ zioni razionali intere di z delle quali la prima è dispari „ e la seconda è pari, e l' equazione:

$$F(z) \cos \pi z + F_1(z) \operatorname{sen} \pi z = 0$$

„ a destra dell' asse delle y o su quest'asse ha soltanto le ra-
„ dici reali e del prim'ordine $0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$, lo sviluppo
„ (53) ove i coefficienti a_0, a_n e b_n sono dati dalle (54) o (55),
„ e gli altri (56) o (58) ove i coefficienti sono dati dalle (57)
„ e (59) sono applicabili alle solite funzioni $f(x)$ date fra
„ $-\pi$ e π, per tutti i valori di x diversi da $\pm\pi$ negli intorni
„ dei quali è soddisfatta una delle condizioni I, II del §. 39.
„ o l' altra di ammettere una derivata o un estremo oscillatorio
„ che resta atto alla integrazione anche ridotto ai suoi valori
„ assoluti, e colle solite particolarità pei punti delle disconti-
„ nuità ordinarie, e escluso il punto zero per la serie (58)
„ quando non sia $f(+0) = 0$ „.

Lo stesso accade se $F(z)$ e $F_1(z)$ sono funzioni irrazionali di z che non hanno punti di diramazione a destra dell' asse delle y o su quest' asse, purchè si abbia $F(-iy) = \pm F(iy)$, con $F_1(-iy) = \mp F_1(iy)$: ec. . . .

84. Gli sviluppi per soli seni (58) nel caso particolare di $F(z) = cz$ e $F_1(z) = c_1$ con c e c_1 costanti (il caso di $c + c_1 \pi = 0$ escl.) concordano pienamente con quelli che si sono presentati in alcune questioni della fisica matematica (*), e dei quali, per quanto è a mia cognizione, non era stata data fin ora una dimostrazione rigorosa.

Oltre a questi poi noi abbiamo dunque gli sviluppi (53) e (56): e questi, come i (58) stessi, si hanno non solo per le indicate funzioni particolari $F(z) = cz$, $F_1(z) = c_1$, ma anche per altre molto generali, e tutti questi nuovi sviluppi possono servire alla risoluzione delle medesime questioni della fisica matematica a cui servivano quelli ora ricordati, e anche alla risoluzione di altre, per quanto, tolti i casi di $F(z) = 0$ o $F_1(z) = 0$, che in sostanza corrispondono a sviluppi di Fourier, gli sviluppi (53) per seni e coseni ad un tempo e gli sviluppi (56) per soli coseni non soddisfano alla condizione (37) che si ha in quelli

(*) V. p. Riemann. Partielle differential Gleichungen pag. 159.

che si sono presentati nella fisica matematica, e gli sviluppi (58) vi soddisfano soltanto quando $F(z) = cz$, e $F_1(z) = c_1$.

85. Aggiungiamo che se le radici $0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$, invece di appartenere alla equazione (52), appartengono, sempre come radici di prim' ordine, a un altra più generale che, almeno pei valori di z di modulo grandissimo a destra dell'asse delle y, prende la forma:

$$u(z) = F(z) \cos \pi z + F_1(z) \operatorname{sen} \pi z + F_2(z) = 0,$$

ove per semplicità supporremo subito senz'altro che almeno sull' asse delle y delle tre funzioni $F(z)$, $F_1(z)$, $F_2(z)$ la prima è l' ultima siano ambedue dispari e la seconda sia pari, e a destra dello stesso asse e sopra di esso queste funzioni siano monodrome finite e continue ec.; allora si hanno altri sviluppi per $f(x)$ che sono ancora della forma (53); ma questi nuovi sviluppi invece di valere fra $-\pi$ e π come quelli del caso precedente, si può assicurare che valgano soltanto fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ ($\pm\frac{\pi}{2}$ al più escl.).

In questo caso infatti l' integrale (46) da considerarsi diverrà $\frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n} \frac{\psi(z) \operatorname{sen} tz\, dz}{z(F \cos \pi z + F_1 \operatorname{sen} \pi z + F_2)}$; e per valersi delle considerazioni del §. 77, si prenderà come nel §. 81. $\psi(z) = F_1 \cos \pi z - F \operatorname{sen} \pi z$; e allora l' integrale precedente diverrà:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n} \frac{\cos\pi z \operatorname{sen} tz}{z \operatorname{sen} \pi z} dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n} \frac{(F + F_2 \cos \pi z) \operatorname{sen} tz}{z \operatorname{sen} \pi z (F \cos \pi z + F_1 \operatorname{sen} \pi z + F_2)} dz,$$

e basterà occuparsi del secondo di questo integrali, giacchè per t fra 0 e 2π (0 e 2π escl.) il primo ha per limite $\frac{1}{2}$ (§. 79.)

Ora, se $F(z)$ non è zero, ponendo:

$$\frac{F_1(z)}{F(z)} = \gamma = a + ib, \quad \frac{F_2(z)}{F(z)} = \delta = c + id,$$

il detto integrale diviene:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n}\frac{(1+\delta\cos\pi z)\operatorname{sen} t z}{z\operatorname{sen}\pi z(\cos\pi z+\gamma\operatorname{sen}\pi z+\delta)}dz;$$

e supponendo che al crescere indefinito di mod z, il δ tenda a zero, o almeno il suo modulo non superi un certo numero, e i moduli di $\gamma+i$ e $\gamma-i$ non si accostino a zero più di un numero determinato, basta seguire il processo del §. 79. per giungere a riconoscere che se t è fra $-\pi$ e π ($\pm\pi$ escl.) questo integrale si riduce all'altro:

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1+\delta\cos\pi z)\operatorname{sen} t z}{z\operatorname{sen}\pi z(\cos\pi z+\gamma\operatorname{sen}\pi z+\delta)}dy,$$

nel quale $z=k_n+iy$, essendo k_n un numero positivo non intero che è grandissimo e non è radice della equazione $u(z)=0$; talchè ora, osservando come al §. 81 che per $z=k_n+iy$ il modulo M' del prodotto $\operatorname{sen}\pi z(\cos\pi z+\gamma\operatorname{sen}\pi z+\delta)$ si pone sotto la forma $M'=\mu'\cosh^2\pi y$, si conclude immediatamente che „ se $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$, sono al solito radici reali positive „ e del prim' ordine ec. della equazione:

$$F(z)\cos\pi z+F_1(z)\operatorname{sen}\pi z+F_2(z)=0, \tag{60}$$

„ ove come abbiamo detto delle funzioni F, F_1 e F_2 la prima e „ l'ultima almeno sull'asse delle y sono ambedue dispari, e la „ seconda è pari, e a destra dello stesso asse e sopra di esso sono „ monodrome finite e continue ec. e $F(z)$ non è sempre zero; „ e se al tempo stesso al crescere indefinito di mod z, il „ rapporto $\frac{F_2(z)}{F(z)}$ si mantiene col modulo sempre inferiore a un „ numero finito, e i moduli di $\frac{F_1(z)}{F(z)}-i$ e $\frac{F_1(z)}{F(z)}+i$ restano di- „ scosti da zero più di un certo numero, allora lo sviluppo;

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_1^{\infty}(a_n\cos\lambda_n x+b_n\operatorname{sen}\lambda_n x), \tag{61}$$

„ ove:

$$=\left[\frac{F_1(0)}{F'(0)+\pi F_1(0)+F^1_2(0)}\right]_0 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx,$$

$$=\left[\frac{F_1(\lambda_n)\cos\pi\lambda_n - F(\lambda_n)\operatorname{sen}\pi\lambda_n}{F'(\lambda_n)\cos\pi\lambda_n+F'_1(\lambda_n)\operatorname{sen}\pi\lambda_n-\pi F(\lambda_n)\operatorname{sen}\pi\lambda_n+\pi F_1(\lambda_n)\cos\pi\lambda_n+F^1_2(\lambda_n)}\right]_0 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos\lambda_n x\,dx,$$

$$=\left[\frac{F_1(\lambda_n)\cos\pi\lambda_n - F(\lambda_n)\operatorname{sen}\pi\lambda_n}{F'(\lambda_n)\cos\pi\lambda_n+F'_1(\lambda_n)\operatorname{sen}\pi\lambda_n-\pi F(\lambda_n)\operatorname{sen}\pi\lambda_n+\pi F_1(\lambda_n)\cos\pi\lambda_n+F^1_2(\lambda_n)}\right]_0 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\operatorname{sen}\lambda_n x\,dx$$

„ sarà applicabile alla funzione $f(x)$ nei soliti punti x fra $-\frac{\pi}{2}$
„ e $\frac{\pi}{2}$ $\left(\pm\frac{\pi}{2}\right.$ al più escl$\left.\right)$ tutte le volte che per valori con-
„ venienti comunque grandi di k_n e per $z=k_n+iy$, il modulo
„ M' del prodotto $\operatorname{sen}\pi z\left\{\cos\pi z+\frac{F_1}{F}\operatorname{sen}\pi z+\frac{F_2}{F}\right\}$ si riduca
„ alla forma $\mu'\cosh^2\pi y$, essendo μ' sempre discosto da zero più
„ di un certo numero „.

86. Ora per trovare dei casi particolari semplici, indichiamo con $m\cosh\pi y$ il modulo di $\cos\pi z+\gamma\operatorname{sen}\pi z$, e con $\mu\cosh^2\pi y$ quello di $\operatorname{sen}\pi z\,(\cos\pi z+\gamma\operatorname{sen}\pi z)$ quando $z=k_n+iy$; si vedrà subito che il quadrato di quello di $\cos\pi z+\gamma\operatorname{sen}\pi z+\delta$ è:

$$m^2\cosh^2\pi y+c^2+d^2+2\left[c(\cos\pi k_n+a\operatorname{sen}\pi k_n)+\right.$$
$$+\left.b\,d\operatorname{sen}\pi k_n\right]\cosh\pi y+2\left[d(a\cos\pi k_n-\operatorname{sen}\pi k_n)-\right.$$
$$\left.-b\,c\cos\pi k_n\right]\operatorname{senh}\pi y,$$

e in conseguenza il modulo M' di $\operatorname{sen}\pi z(\cos\pi z+\gamma\operatorname{sen}\pi z+\delta)$ è $\mu'\cosh^2\pi y$, con:

$$\mu'^2 = \mu^2 \left\{ 1 + \frac{c^2+d^2}{m^2 \cosh^2 \pi y} + 2\frac{(ac+bd)\operatorname{sen}\pi k_n + c\cos\pi k_n}{m^2 \cos h\, \pi y} + \right.$$
$$\left. + 2\frac{(a\,d-b\,c)\cos\pi k_n - d\operatorname{sen}\pi k_n}{m^2\cosh\pi y} \operatorname{tgh}\pi y \right\};$$

quindi, osservando che se γ non è identicamente zero, e γ_1 è il suo argomento si ha:

$$\gamma\,\delta = \frac{\delta}{\gamma}\gamma^2 = \frac{a\,c+b\,d+i\,(a\,d-b\,c)}{a^2+b^2}\gamma^2 = [a\,c+b\,d+i(ad-b\,c)]\,e^{2\,i\,\gamma_1},$$

si vede chiaro, senza neppure escludere ora il caso di $\gamma=0$, che se al crescere ind finito di n i numeri δ e $\gamma\,\delta$ tendono ambedue a zero, basta che μ resti discosto da zero più di un numero determinato perchè altrettanto accada di μ'; e quindi, limitandosi a un caso particolare soltanto, si potrà dire evidentemente che „ lo sviluppo precedente (61) sarà „ applicabile fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ $\left(\pm\frac{\pi}{2}\text{ al più escl.}\right)$ quando al cre- „ scere indefinito del modulo di z il rapporto $\frac{F_2}{F}$ tenda a zero „ e l' altro $\frac{F_1}{F}$ sia nel terzo dei casi del §. 82, o, essendo in uno „ degli altri due casi dello stesso paragrafo, converga contempo- „ raneamente a zero il prodotto $\frac{F_1 F_2}{F^2}$ dei rapporti medesimi „.

Facilmente si troverebbero altri casi semplici di equazioni della forma (60) pei quali lo sviluppo (61) riesce applicabile.

87. Passando ora al caso di $F=0$, con F_1 diverso da zero, osserveremo che ponendo $\frac{F_2(z)}{F_1(z)} = p = e + i\,f$, l' integrale da considerarsi diverrà $\frac{1}{2\,\pi\,i}\int_{C'_n} \frac{p\cos\pi z \operatorname{sen} t\,z\,d\,z}{z\operatorname{sen}\pi z\,(p+\operatorname{sen}\pi z)}$, e siccome le $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, devono essere reali, il p al crescere indefinito di mod z dovrà prendere anche valori reali non superiori all' unità in valore assoluto. „ Limitandosi dunque al

„ caso in cui, essendo $p=\frac{F_2(z)}{F_1(z)}$, il modulo di p finisce per re-
„ stare sempre inferiore a un numero finito, si vedrà al solito che,
„ anche nel caso attuale della equazione:

(62) $$F_1(z) \operatorname{sen} \pi z + F_2(z) = 0$$

„ lo sviluppo (61) sarà applicabile fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ $\left(\pm\frac{\pi}{2}\right.$ al più escl.$\left.\right)$
„ quando per valori convenienti non interi ma comunque
„ grandi di k_n e per $z=k_n+iy$ il modulo M_1 di sen πz ($p+$sen πz)
„ si riduce alla forma $M_1=\mu_1 \cosh^2 \pi y$ con μ_1 discosto da zero
„ più di un certo numero; e in questo caso i coefficienti
„ a_0, a_n e b_n dello sviluppo saranno dati dalle formole:

(63) $$\begin{cases} a_0=\left[\dfrac{F_1(0)}{\pi F_1(0)+F'_2(0)}\right]_0 \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx, \\[2ex] a_n=\left[\dfrac{F_1(\lambda_n)\cos\pi\lambda_n}{F'_1(\lambda_n)\operatorname{sen}\pi\lambda_n+\pi F_1(\lambda_n)\cos\pi\lambda_n+F'_2(\lambda_n)}\right] \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos\lambda_n x\,dx, \\[2ex] b_n=\left[\dfrac{F_1(\lambda_n)\cos\pi\lambda_n}{F'_1(\lambda_n)\operatorname{sen}\pi\lambda_n+\pi F_1(\lambda_n)\cos\pi\lambda_n+F'_2(\lambda_n)}\right]_0 \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos\lambda_n x\,dx, \end{cases}$$

che sono quelle cui si riducono le corrispondenti del caso precedente facendovi $F(z)=0$.

88. Ora, per trovare alcuni casi semplici particolari nei quali questo teorema è applicabile, osserviamo che per $z=k_n+iy$ si ha:

$$M_1^2=(\cosh^2\pi y-\cos^2\pi k_n)[(e+\operatorname{sen}\pi k_n\cosh\pi y)^2+(f+\cos\pi k_n \operatorname{senh}\pi y)^2],$$

e prendendo $k_n=\frac{2n+1}{2}$ si trova $\mu^2_1=\left(1+\frac{e}{\cosh\pi y}\right)^2+\frac{f^2}{\cosh^2\pi y}$;

e quindi si ha subito in particolare che „ se trattandosi ancora

„ della equazione (62), mod p finisce per esser sempre inferiore „ a uno più di una certa quantità diversa da zero q, allora „ (essendo $e^2 < (1-q)^2$, e $\mu_1 > q$) lo sviluppo (61) ove i coefficienti „ a_0, a_n, b_n sono dati dalle (63) sarà applicabile alla solita fun- „ zione $f(x)$ per x fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ ($\pm\frac{\pi}{2}$ al più escl.) „.

Osservando poi che col prendere k_n in modo che sia sen $k_n \pi = \alpha$, con α quantità diversa da zero da determinarsi, si ha $\mu_1^2 = \left(1 - \frac{1-\alpha^2}{\cosh^2 \pi y}\right)\mu_2^2$, con:

$$\mu_2^2 = \left(\frac{e}{\cosh \pi y} + \alpha\right)^2 + \left(\frac{f}{\cosh \pi y} + \sqrt{1-\alpha^2}\,\mathrm{tgh}\,\pi y\right)^2 = \frac{e^2}{\cosh^2 \pi y} + \alpha^2 +$$

$$+ (1-\alpha^2)\,\mathrm{tgh}^2\,\pi y + \frac{2e\alpha}{\cosh \pi y} + \frac{f^2}{\cosh^2 \pi y} + \frac{2f\sqrt{1-\alpha^2}\,\mathrm{tgh}\,\pi y}{\cosh \pi y} = e^2 +$$

$$+ \frac{\alpha^2}{\cosh^2 \pi y} + \frac{2e\alpha}{\cosh \pi y} + f^2 + (1-e^2-f^2)\,\mathrm{tgh}^2 \pi y + \frac{2f\sqrt{1-\alpha^2}\,\mathrm{tgh}\,\pi y}{\cosh \pi y} =$$

$$= \left(e + \frac{\alpha}{\cosh \pi y}\right)^2 + f^2 + (1-e^2-f^2)\,\mathrm{tgh}^2 \pi y + \frac{2f\sqrt{1-\alpha^2}\,\mathrm{tgh}\,\pi y}{\cosh \pi y}$$

si vede subito che se f tende a zero al crescere indefinito di mod z, e mod p invece non si accosta a zero più di una quantità determinata q, e al tempo stesso finisce per non superare mai l' unità, o almeno i valori che prendesse superiori ad uno finiscono per essere prossimi ad uno quanto si vuole, allora preso per es. $\alpha = \frac{1}{2}q$, il μ_1 finirà per non essere mai inferiore a $\frac{q^2}{4}$ più di una quantità piccola a piacere; e si conclude quindi come nuovo caso particolare semplice di applicabilità del teorema precedente che „ se, trattandosi ancora della equazio- „ ne (62), al crescere indefinito di mod z il numero p o „ $\frac{F_2(z)}{F_1(z)}$ tende a divenire sempre reale, e in valore assoluto „ la sua parte reale non si accosta a zero più di un numero „ determinato, e non supera l' unità o tutt' al più la supe-

„ ra di quantità che finiscono per essere piccole a piacere,
„ allora lo sviluppo (61) ove i coefficienti sono dati dalle (63)
„ è ancora applicabile alla solita funzione $f(x)$ per x fra $-\frac{\pi}{2}$
„ e $\frac{\pi}{2}$ ($\pm\frac{\pi}{2}$ al più escl.) „.

Si hanno così due casi semplici di equazioni della forma:

$$F_1(z) \operatorname{sen} \pi z + F_2(z) = 0,$$

per le quali lo sviluppo (61) è applicabile, e evidentemente sarebbe facile di trovarne anche degli altri.

Al solito poi da questi sviluppi per seni, e coseni se ne possono avere altri per soli seni o per soli coseni fra 0 e $\frac{\pi}{2}$ ec.

89. È utile ora presentare la osservazione seguente:

Nelle applicazioni che abbiamo fatte nei §. 74 e seg. alla ricerca degli sviluppi della forma:

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_1^{\infty}(a_n \cos \lambda_n x + b_n \operatorname{sen} \lambda_n x),$$

ove $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n, ..$ sono le radici reali, positive e del prim' ordine di una equazione $u(z) = \frac{1}{w}(z) = 0$, abbiamo supposto che questa equazione a destra dell'asse y e su quest'asse non avesse altre radici che le stesse $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, ..$ e la radice zero.

Se questo non fosse, e la equazione data, a destra sempre dell' asse delle y o su quest'asse, avesse anche altre radici, come pure, più generalmente, se la funzione indicata sopra con $\psi(z)w(z)$ divenisse infinita nello stesso campo in punti diversi da $0, \lambda_1, \lambda_2 ..., \lambda_n ..$, allora le quantità γ_r, che sono i residui di $\psi(z)w(z) \operatorname{sen} tz$ nei suoi punti d'infinito $\mu_1, \mu_2, .., \mu_{m_n}, ...$ diversi da $0, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n ..$, non sarebbero più uguali allo zero, e occorrerebbe esaminare anche la somma $\sum_1^{m_n}\gamma_r$ dei residui

γ_r corrispondenti ai punti d' infinito $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{m_n}$ che cadessero fra l' asse delle y e la solita linea C'_n.

Però i risultati precedenti dovrebbero modificarsi soltanto in questo che agli integrali (46) e (47) verrebbero sostituite le differenze:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n}\frac{\psi(z)\,w(z)\,\mathrm{sen}\,tz\,dz}{z}-\sum_1^{m_n}\gamma_r,\quad \frac{1}{2\pi i}\int\psi(z)w(z)\cos tz\,dz-\frac{\partial}{\partial t}\sum_1^{m_n}\gamma_r,$$

e le condizioni che si avevano per gli integrali stessi (o per quelli che ad essi corrispondono nei casi particolari) dovrebbero verificarsi per la parte reale di queste differenze.

Ne segue che se la parte reale della quantità $\sum_1^{m_n}\gamma_r$ avesse per limite per $n=\infty$ una funzione $\chi_2(t)$ di t che si annulla per $t=0$, e che fra 0 e t_0 (0 e t_0 incl.) è finita e continua e ammette una derivata finita e atta alla integrazione, allora per gli integrali (46) e (47), o per quelli che loro corrispondono nei casi particolari, dovranno ancora verificarsi le condizioni che si avevano per essi nei paragrafi precedenti; e le varie formole dovranno mutarsi col sostituire alla funzione $\chi_1(t)$ che allora si aveva l' altra $\chi_1(t)-\chi_2(t)$; talchè negli attuali sviluppi non si verrà ad avere un cambiamento altro che nel valore del termine $\frac{1}{2}a_0$.

In particolare dunque nel caso degli sviluppi:

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_1^{\infty}(a_n\cos\lambda_n x+b_n\,\mathrm{sen}\,\lambda_n x)$$

che corrispondono alle equazioni (52), (60) e (62) per le quali gli integrali (46) e (47) hanno le proprietà volute e $\chi_1(+0)=\frac{1}{2}$, quando avverrà che le equazioni stesse a destra dell'asse delle y o su quest'asse oltre alle radici $0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$, ne abbiano

anche altri tali che la somma corrispondente $\sum_{1}^{m_n} \gamma_r$ abbia per limite una funzione $\chi_2(t)$ che ha le particolarità indicate sopra, allora gli sviluppi stessi saranno ancora possibili, con questo però che mentre in essi i coefficienti a_n e b_n per $n \geq 1$ rimarranno ancora quelli che abbiamo dato sopra, il termine $\frac{1}{2} a_0$ invece subirà un cambiamento, inquantochè nell'integrale che comparisce in a_0 a $f(x)$ dovremo sostituire il prodotto $\left[1 + \frac{\chi'_2(x-\alpha)}{a'_0}\right] f(x)$, essendo a'_0 il fattore che figura fuori del detto integrale.

È inoltre da notare che se i punti d'infinito $\mu_1, \mu_2 \ldots$ di $\psi(z)\, w(z)$ diversi da $0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ sono tutti di prim'ordine, e $\gamma'_1, \gamma'_2, \ldots$ sono i residui corrispondenti, si avrà

$$\gamma_r = \gamma'_r \operatorname{sen} t \mu_r, \quad \text{e} \quad \chi_2(t) = \lim_{n=\infty} \sum_{1}^{m_n} \gamma'_r \operatorname{sen} t \mu_r .$$

90. Prendiamo ora a trattare il problema più generale posto già dallo Sturm (*), quello cioè di rappresentare una funzione reale $f(x)$ della variabile pure reale x data arbitrariamente fra a e b in serie della forma $\Sigma\, q_n \mathrm{H}(\lambda_n, x)$, con:

$$(64) \qquad q_n = \frac{\int_a^b \mathrm{F}(x) f(x) \mathrm{H}(\lambda_n, x)\, dx}{\int_a^b \mathrm{F}(x) \mathrm{H}^2(\lambda_n, x)\, dx},$$

quando per tutti i valori di m diversi da n e per una funzione reale conveniente $\mathrm{F}(x)$ si ha:

$$(65) \qquad \int_a^b \mathrm{F}(x) \mathrm{H}(\lambda_m, x) \mathrm{H}(\lambda_n, x)\, dx = 0,$$

(*) Journal de Liouville. Vol. I.

e le $H(z, x)$ per x compreso fra a e b (a e b incl.) sono funzioni monodrome e continue di z che per semplicità saranno supposte sempre reali quando la x ha gl' indicati valori fra a e b (a e b incl.) e la z ha i valori $\lambda_1, \lambda_2, .. \lambda_n, ..$; e inoltre le stesse funzioni $H(z, x)$, almeno per questi valori particolari $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n, ..$ di z, soddisfano alla equazione differenziale:

$$(66) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial H}{\partial x}\right) + g\,H = 0\,,$$

essendo K una funzione indipendente da z, mentre g invece dipende anche da z; e le $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n, ...$ essendo radici semplici di una certa equazione trascendente $u(z) = \frac{1}{w(z)} = 0$.

Questi sviluppi rientrano appunto fra quelli considerati nei §§. 68 e 69; quindi sarà il caso di applicare l' uno o l' altro dei teoremi dei paragrafi stessi.

Indichiamo perciò, per abbreviare con H, H_n, g_n le funzioni $H(z,x), H(\lambda_n, x), g(\lambda_n, x)$ respettivamente; e osserviamo che essendo:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial H_m}{\partial x}\right) + g_m H_m = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial H_n}{\partial x}\right) + g_n H_n = 0\,,$$

avremo:

$$(67) \quad (g_n - g_m) H_m H_n + \frac{\partial}{\partial x}\left\{K\left(H_m\frac{\partial H_n}{\partial x} - H_n\frac{d\,H_m}{d\,x}\right)\right\} = 0\,,$$

e ammettendo che le H_n siano funzioni di x finite e continue fra a e b, e che g sia della forma $F(x)\,\nu(z) + F_1(x)$ onde la differenza $g_n - g_m$ si riduca al prodotto $F(x)\,[\nu(\lambda_n) - \nu(\lambda_m)]$, si troverà la formola seguente:

$$(68) \quad \int_a^b F(x)\, H_m H_n dx = \frac{1}{\nu(\lambda_n) - \nu(\lambda_m)}\left\{K\left(H_n\frac{\partial H_m}{\partial x} - H_m\frac{\partial H_n}{\partial x}\right)\right\}_b^a$$

che varrà per λ_m diverso da λ_n; talchè, onde col valore della funzione $F(x)$ che figura nella equazione (66) o nella seguente:

$$(69) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial H}{\partial x}\right) + \left\{F(x)\,\nu(z) + F_1(x)\right\} H = 0,$$

sia soddisfatta la condizione (65), bisognerà che gli integrali H e le radici $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n, \ldots$, siano prese in modo che si abbia:

$$K_b\left(H_n \frac{\partial H_m}{\partial x} - H_m \frac{\partial H_n}{\partial x}\right)_b - K_a\left(H_n \frac{\partial H_m}{\partial x} - H_m \frac{\partial H_n}{\partial x}\right)_a = 0$$

per tutti i valori di λ_m e λ_n diversi fra loro; intendendo ora e in seguito che le lettere a o b messe in basso a date quantità indichino che nelle quantità stesse deve farsi $x=a$ o $x=b$ respettivamente.

91. Fra i modi particolari di soddisfare a questa condizione vi è quello di supporre che per ogni valore di n si abbiano le due equazioni:

$$(70)\quad \begin{cases} K \dfrac{\partial H_n}{\partial x} - h' H_n = 0 & \text{per } x=a, \\ K \dfrac{\partial H_n}{\partial x} - h\, H_n = 0 & \text{per } x=b, \end{cases}$$

ove h e h' sono due costanti reali qualunque, includendo in ciò anche i casi in cui K o $\frac{\partial H_n}{\partial x}$ sono zero per $x=a$ o $x=b$, i quali quando non si abbiano singolarità in $\frac{\partial H_n}{\partial x}$ o in K corrispondono a $h'=0$ o $h=0$; e includendovi pure i casi di $H_n=0$ per $x=a$ o $x=b$ che corrispondono ai valori limiti $h'=\pm\infty$ o $h=\pm\infty$; e noi supporremo senz' altro che queste due equazioni debbano essere soddisfatte.

Così essendo, osserveremo che, se sono dati a e b e queste equazioni (70) non si riducono alle due $K_a=0$, $K_b=0$, l'una di esse, per es. la prima, potrà servire a determinare il valore di H_n o quello di $\frac{\partial H_n}{\partial x}$ per $x=a$ quando sia fissata l'altra di queste quantita, determinando così completamente l'integrale H_n che dovrà figurare nella serie $\Sigma q_n H_n$, e che, come abbiamo detto, dovrà risultare reale per tutti i valori di x fra a e b (a e b incl.); e l'altra equazione allora figurerà come una equazione in λ_n che determinerà le quantità λ_n; talchè in que-

sto caso per equazione $u(z)=\frac{1}{w(z)}=0$ si potrà prendere la seguente:

$$u(z)=\left[K\frac{\partial H}{\partial x}-h\,H\right]_b=0.$$

Quando poi, per es. per $x=a$ si abbia $K=0$ senza che per $x=b$ sia $K=0$, allora se sarà già stabilito di quali integrali H_n della equazione (66) o (69) si vorrà fare uso, la seconda delle equazioni (70) potrà riguardarsi come quella che determina le radici λ_n e quindi potrà prendersi per la equazione $u(z)=0$; ma se per gli integrali H_n sarà dato soltanto il valore di H_n o quello di $\frac{\partial H_n}{\partial x}$ per $x=b$, allora la seconda delle equazioni (70) medesime potrà farsi servire a determinare l' altro di questi valori, e in tal caso potrà prendersi a piacere la equazione $u(z)=0$ che deve determinare le quantità λ_n; mentre infine se le equazioni (70) si ridurranno alle due $K_a=0$ e $K_b=0$, allora rimarranno pienamente indeterminate le due costanti arbitrarie che figurano negli integrali delle (66) o (69) e potranno prendersi a piacere e anche funzioni di z, come potrà prendersi a piacere la equazione $u(z)=0$ che deve determinare le quantità λ_n; salvo bene inteso in ogni caso a procurare che gli integrali H non presentino singolarità nè rispetto ad x nè rispetto a z nei campi ove devono considerarsi, e siano reali pei valori $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n, ..$, di z e per qualunque valore di x fra a e b; e riservandosi sempre di esaminare se sia o nò possibile di soddisfare alle varie condizioni dei teoremi dei §§. 68 o 69 prima di potere assicurare che lo sviluppo $\Sigma q_n H_n$ è possibile nei soliti casi per una funzione reale $f(x)$ data arbitrariamente fra a e b.

Similmente, se saranno dati per es. gli integrali H_n, senza però che si conoscano i numeri a e b, e questi numeri per valori convenienti delle costanti h e h' potranno determinarsi in modo che riescano identiche le equazioni (70) qualunque sia λ_n, allora rimarrà ancora pienamente indeterminata la equa-

zione $u(z)=0$ che determina questa quantità λ_n; e lo stesso accadrà se, essendo dati per es. soltanto a e uno dei valori H_n o $\frac{\partial H_n}{\partial x}$ per $x=a$, si potrà determinare l' altro di questi valori H_n o $\frac{\partial H_n}{\partial x}$ mediante la prima delle (70) e il b mediante la seconda.

92. In ogni caso però se $F(x)$ è reale e non cangia mai di segno per x reale e compreso fra a e b; e se per ogni valore reale o complesso di z in un campo simmetrico attorno all'asse reale, la $H(z, x)$, considerandovi anche x come variabile complessa, è funzione di x monodroma, finita e continua in un certo campo connesso C che racchiuda i punti a e b, allora la condizione (65) fà sì che le radici della equazione da considerarsi $u(z)=0$ debbano necessariamente essere reali quando questa equazione è la seconda delle (70), o la $H_b=0$, o anche, più generalmente, quando essa è tale che ammettendo una radice complessa dovesse necessariamente ammettere anche la sua coniugata.

Supposto infatti che λ_m e λ_n fossero due radici coniugate della nostra equazione $u(z)=0$, sarebbe per x reale $H(\lambda_m, x)=P+iQ$, $H(\lambda_n, x)=P-iQ$ essendo P e Q certe funzioni reali di x, e allora la condizione (65) si ridurrebbe all' altra $\int_a^b F(x)(P^2+Q^2)\,dx=0$; quindi, poichè questa porterebbe $P=Q=0$ (perchè $F(x)$, P e Q si suppongono naturalmente continue), le funzioni $H(\lambda_m, x)$, $H(\lambda_n, x)$ come funzioni di x sarebbero zero in tutto il tratto rettilineo (a, b) e quindi anche in tutto C, e questo non può essere.

93. Aggiungiamo che quando la nostra $H(z, x)$, considerata come funzione delle due variabili z e x, si mantiene finita e continua insieme alle sue derivate prime e seconde $\frac{\partial H}{\partial x}$, $\frac{\partial H}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial z}$ per tutti i valori reali di x fra a e b (a e b incl.) e pei valori com-

plessi di z in intorni dei punti λ_n (*), e per questi valori di x e di z essa soddisfa sempre alla equazione (66) o (69); e inoltre o si ha $K=0$ per $x=a$, o è identicamente soddisfatta la equazione $H=0$ o l' altra $K\frac{\partial H}{\partial x}-h'H=0$ per $x=a$ e per qualsiasi valore di z negli indicati intorni, allora sarà facile di trovare anche i valori degli integrali $\int_a^b F(x)H_n^2\,dx$ che figurano nei coefficienti q_n della serie $\sum_1^\infty q_n H_n$.

Si osservi infatti che cambiando nella (67) il λ_m in z, (il chè ora può farsi), e integrando fra a e x si ottiene la seguente:

$$\int_a^x F(x)H\,H_n\,dx=\frac{1}{\nu(z)-\nu(\lambda_n)}K\left(H\frac{\partial H_n}{\partial x}-H_n\frac{\partial H}{\partial x}\right)$$

chè varrà per x compreso fra a e b (a e b incl.) e per qualsiasi valore di z negli indicati intorni; e siccome, per le nostre ipotesi, il primo membro è una funzione continua di z per $z=\lambda_n$, il suo limite per $z=\lambda_n$ sarà l' integrale $\int_a^x F(x)\,H_n^2\,d\,x$.

Invece a causa delle nostre ipotesi il limite del secondo membro sarà $\left[\frac{1}{\nu'(z)}K\left(\frac{\partial H}{\partial z}\frac{\partial H_n}{\partial x}-H_n\frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial z}\right)\right]_{z=\lambda_n}$, ovvero $\frac{1}{\nu'(\lambda_n)}K\left(\frac{\partial H_n}{\partial\lambda_n}\frac{\partial H_n}{\partial x}-H_n\frac{\partial^2 H_n}{\partial\lambda_n\,\partial x}\right)$; dunque facendo $x=b$ e passando al limite nella formola precedente, si trova subito che sotto le fatte ipotesi l' integrale cercato è dato dalla formola:

$$(71)\qquad \int_a^b F(x)H_n^2\,dx=\frac{1}{\nu'(\lambda_n)}\,K_b\left(\frac{\partial H_n}{\partial\lambda_n}\frac{\partial H_n}{\partial x}-H_n\frac{\partial H_n}{\partial\lambda_n\partial x}\right)_b;$$

(*) S' intende che quì si parla di continuità rispetto alle variabili z e x prese insieme.

e se h sarà finito a causa della seconda delle formole (70) si potrà anche scrivere:

$$(69) \qquad \int_a^b F(x)\, H_n^2\, dx = \frac{1}{\nu'(\lambda_n)} \left[H_n \left(h \frac{\partial H_n}{\partial \lambda_n} - K \frac{\partial^2 H_n}{\partial \lambda_n \partial x} \right) \right]_b;$$

mentre se h è infinito, riducendosi la seconda delle (70) a $H_b = 0$, si avrà:

$$\int_a^b F(x)\, H_n^2\, d\, x = \frac{\left(K \frac{\partial H_n}{\partial \lambda_n} \frac{\partial H_n}{\partial x} \right)_b}{\nu'(\lambda_n)};$$

donde risulta anche che se, come supponiamo, $F(x)$ e H_n saranno sempre reali per x compreso fra a e b e $F(x)$ non muterà mai di segno in questo intervallo, le varie condizioni che abbiamo poste per giungere a trovare il valore dell' integrale $\int_a^b F(x)\, H_n^2 dx$ non potranno coesistere quando per $x = b$ sia zero il K, o lo sia H_n insieme a $\frac{\partial H_n}{\partial x}$ o a $\frac{\partial H_n}{\partial \lambda_n}$, o sia zero per $z = \lambda_n$ anche la derivata rapporto a z della espressione $\left[K \frac{\partial H}{\partial x} - h\, H \right]_b$; e allora per avere il valore dell' integrale precedente converrà seguire altri processi.

S' intende poi che nelle formole ora trovate per l'integrale $\int_a^b F(x)\, H_n^2\, dx$, a λ_n potremo anche sostituire z purchè z sia in quei campi nei quali con x compreso fra a e b la funzione H soddisfa alla equazione (66) o (69) e alle altre condizioni poste sopra.

94. A questo inoltre aggiungiamo la osservazione seguente.

Quando è data la equazione differenziale (66), ponendo $H = \tau P$, ove τ è una certa funzione di x, e calcolando con questa il $\frac{\partial H}{\partial x}$

e poi il $\dfrac{\partial\left(K\dfrac{\partial H}{\partial x}\right)}{\partial x}$, e sostituendo nella precedente si trova:

$$K\tau\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\left\{\frac{\partial(K\tau)}{\partial x}+K\frac{\partial\tau}{\partial x}\right\}\frac{\partial P}{\partial x}+\left\{g\tau+\frac{\partial\left(K\dfrac{\partial\tau}{\partial x}\right)}{\partial x}\right\}P=0,$$

donde, moltiplicando per τ si passa alla equazione:

$$\frac{\partial\left(K\tau^2\dfrac{\partial P}{\partial x}\right)}{\partial x}+\left\{g\tau^2+\tau\frac{\partial\left(K\dfrac{\partial\tau}{\partial x}\right)}{\partial x}\right\}P=0,$$

che è della stessa forma della (66); e il τ può prendersi in modo che il coefficiente $g\tau^2+\tau\dfrac{\partial\left(K\dfrac{\partial\tau}{\partial x}\right)}{\partial x}$ di P o quello $K\tau^2$ di $\dfrac{\partial P}{\partial x}$ soddisfino a certe condizioni speciali.

Così per es. se g è della solita forma $F(x)\nu(z)+F_1(x)$, presa per τ una funzione della sola x in modo che sia:

$$\frac{\partial\left(K\dfrac{\partial\tau}{\partial x}\right)}{\partial x}+\left\{F_1(x)+c\,F(x)\right\}\tau=0\,, \tag{72}$$

con c costante arbitraria, la equazione precedente diverrà:

$$\frac{\partial\left(K\tau^2\dfrac{\partial P}{\partial x}\right)}{\partial x}+\tau^2F(x)\left\{\nu(z)-c\right\}P=0\,, \tag{73}$$

cioè prenderà la forma cui si riduce la (69) nel caso particolare di $F_1(x)=0$, donde apparisce che nella (69) stessa potremo supporre sempre ridotta a zero la funzione $F_1(x)$, salvo a sviluppare poi $f(x)$, anzichè per funzioni H_n, per funzioni P_n o $\dfrac{H_n}{\tau}$, essendo τ una funzione *della sola* x determinata dalla equazione (72); per modo che applicando lo sviluppo in serie

$\Sigma\, q_n\, P_n$ a $\frac{f(x)}{\tau}$ invece che a $f(x)$, s' intende che si verrà ad ottenere anche lo sviluppo $\Sigma\, q_n\, H_n$ di $f(x)$ per funzioni H_n, con sole differenze nei coefficienti q_n della serie, i quali invece di essere dati dalla formola (64) verranno dati dall' altra:

$$(74)\qquad q_n = \frac{\int_a^b \frac{F(x)}{\tau^2} f(x)\, H_n\, dx}{\int_a^b \frac{F(x)}{\tau^2}\, H_n^2\, dx}.$$

95. Si può poi aggiungere che se per un valore conveniente della costante arbitraria c si ha $F_1(x) + c\, F(x) = -\frac{\mu}{K}$ con μ costante, la (72) diverrà:

$$K\frac{\partial \tau}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial \tau}{\partial x}\right) = \mu\, \tau\frac{\partial \tau}{\partial x},$$

e quindi indicando con p una costante arbitraria, si avrà:

$$\left(K\frac{\partial \tau}{\partial x}\right)^2 = p + \mu\, \tau^2,\ \text{ovvero}\ \frac{\frac{\partial \tau}{\partial x}}{\sqrt{p + \mu\, \tau^2}} = \pm\frac{1}{K},$$

donde si otterrà τ con una sola quadratura; e in particolare, se μ è positivo, prendendo $p = 0$ si troverà:

$$\log \tau = \sqrt{\mu}\int\frac{dx}{K} + \log c_1,\quad \text{ovvero}\quad \tau = c_1\, e^{\sqrt{\mu}\int\frac{dx}{K}},$$

essendo c_1 una costante arbitraria, e di $\sqrt{\mu}$ potendo prendersi il valore positivo o il valore negativo.

Invece se μ è negativo, supponendo p positivo, si potrà prendere:

$$\tau = \sqrt{\frac{p}{-\mu}}\ \mathrm{sen}\left(\sqrt{-\mu}\int\frac{dx}{K} + c_1\right),$$

ove i radicali possono prendersi col segno che più ci piace.

96. Ciò premesso, passiamo a studiare gli sviluppi $\sum q_n H_n$, ove H_n soddisfa alla equazione (66) o (69) nella quale, come abbiamo detto, può sempre supporsi $F_1(x)=0$, e le q_n sono determinate dalla formola (64).

Ammettiamo per semplicità che i punti λ_n siano tutti a destra dell'asse delle y, e le funzioni $H(z, x)$, siano come nel §. 93, finite e continue insieme alle loro derivate prime e seconde per tutti i valori di x fra a e b (a e b incl.) e pei valori di z entro gli intorni dei punti λ_n; e di più queste funzioni $H(z, x)$ come funzioni di z, siano monodrome e continue anche entro i soliti campi formati dalle linee C_n; e al tempo stesso o sia $K=0$ per $x=a$, o per $x=a$ e z compreso negli indicati intorni sia soddisfatta identicamente la equazione $H=0$ o l'altra $K\frac{\partial H}{\partial x}-h' H=0$.

Allora per quanto si disse ai §§. 90 e 91. K_b non sarà zero, e la equazione $\left[K\frac{\partial H}{\partial x}-h H\right]_b=0$ che corrisponde ad h finito, o l'altra $H_b=0$ che corrisponde a $h=\pm\infty$ non saranno soddisfatte altro che da valori particolari di z che saranno reali e non soddisfaranno alla respettiva equazione derivata; e di questi valori quelli positivi noi dovremo prenderli per le radici λ_n; quindi nel caso attuale se h è finito avremo, colle notazioni dei paragrafi precedenti:

$$(75)\quad \begin{cases} u(z)=\dfrac{1}{w(z)}=\left[K\dfrac{\partial H}{\partial x}-h H\right]_b, \\ \displaystyle\int_a^b F(x)H_n^2 dx=\frac{1}{\nu'(\lambda_n)}\left[H_n\left(h\frac{\partial H_n}{\partial\lambda_n}-K\frac{\partial^2 H_n}{\partial\lambda_n\,\partial x}\right)\right]_b=-\frac{(H_n)_b\, u'(\lambda_n)}{\nu'(\lambda_n)}, \end{cases}$$

e se h è infinito avremo invece:

$$(76)\quad \begin{cases} u(z)=\dfrac{1}{w(z)}=H_b, \\ \displaystyle\int_a^b F(x)\, H_n^2\, dx=\frac{u'(\lambda_n)}{\nu'(\lambda_n)}\left(K\frac{\partial H_n}{\partial x}\right)_b, \end{cases}$$

talchè pei teoremi dei §§. 68. e 69. noi possiamo affermare che onde esser sicuri che la funzione $f(x)$ si possa sviluppare pei soliti punti x fra a e b secondo la serie $\Sigma\, q_n\, H_n$, quando h è finito occorrerà prendere ad esame l'una o l'altra delle due espressioni seguenti:

$$(77)\quad \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\left\{-\frac{\nu'(z)\,H(z,\alpha)\int_0^t F(\alpha+t)\,H(z,\alpha+t)\,dt}{H(z,b)}+\pi(\alpha,t,z)\right\}\frac{dz}{\left[K\frac{\partial H}{\partial x}-hH\right]_b}-\sum_1^{m_n}\gamma_r$$

$$(78)\quad \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{\varphi(z)\,\psi(z)dz}{\left[K\frac{\partial H}{\partial x}-h\,H\right]_b^2}-\sum_1^{m_n}\gamma_r,$$

ove le γ_r sono i residui delle funzioni sotto gli integrali nei punti d'infinito che esse hanno entro C_n diversi da $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$; e nella prima $\pi(\alpha, t, z)$ è una funzione monodroma e continua entro C_n che si annulla nei punti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n, \ldots$ e può prendersi uguale a zero senz'altro, mentre nella seconda $\psi(z)$ deve soddisfare alla condizione $\psi'(\lambda_n)\, u'(\lambda_n) - \psi(\lambda_n)\, u''(\lambda_n) = 0$, essendo $u(z) = \left[K\frac{\partial H}{\partial x} - h\, H\right]_b$ e $\varphi(z)$ deve determinarsi colla condizione che sia:

$$(79)\quad \varphi'(\lambda_n) = -\frac{\nu'(\lambda_n)\, u'(\lambda_n)\, H(\lambda_n, \alpha)\int_0^t F(\alpha+t)\, H(\lambda_n, \alpha+t)\, dt}{\psi(\lambda_n)\, H(\lambda_n, b)}.$$

Se poi h è infinito, allora invece degli integrali precedenti, dovremo esaminare gli altri:

$$(80)\quad \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\left\{\frac{\nu'(z)\,H(z,\alpha)\int_0^t F(\alpha+t)H(z,\alpha+t)dt}{\left(K\frac{\partial H}{\partial x}\right)_b}+\pi(\alpha,t,z)\right\}\frac{dz}{H(z,b)}-\sum_1^{m_n}\gamma_r,$$

$$(81)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{\varphi(z)\,\psi(z)\,dz}{H^2(z,b)}-\sum_1^{m_n}\gamma_r\,,$$

con $\psi'(\lambda_n)\,H'(\lambda_n\,,b)-\psi(\lambda_n)\,H''(\lambda_n\,,b)=0$, e:

$$(82)\quad \varphi'(\lambda_n)=\frac{\nu'(\lambda_n)\,H'(\lambda_n\,,b)\,H(\lambda_n\,,\alpha)\int_0^t F(\alpha+t)\,H(\lambda_n\,,\alpha+t)dt}{\psi(\lambda_n)\left(K\dfrac{\partial H_n}{\partial x}\right)_b}\,,$$

ove s' intende che $H'(\lambda_n, b)$ e $H''(\lambda_n, b)$ siano le derivate di $H(z,b)$ prese rispetto a z per $z=\lambda_n$; e mentre le (77) e (80) dovranno soddisfare alle condizioni che si avevano per la (40) nel teorema del §. 68, le (78) e (81) dovranno soddisfare alle condizioni che si avevano per la (42) nel teorema del §. 69.

Siccome poi la equazione (69) ci dà:

$$\nu(z)\int_\alpha^{\alpha+t}F(x)\,H(z\,,x)\,dx=-\left(K\frac{\partial H}{\partial x}\right)_{\alpha+t}+\left(K\frac{\partial H}{\partial x}\right)_\alpha-\int_\alpha^{\alpha+t}F_1(x)\,H(z\,,x)\,d\,x\,,$$

potremo trasformare le espressioni precedenti per mezzo di questa formola; e nel caso particolare di $F_1(x)=0$, avendosi di quì:

$$(83)\quad \int_0^t F(\alpha+t)H(z,\alpha+t)dt=-\frac{1}{\nu(z)}\left\{\left(K\frac{\partial H}{\partial x}\right)_{\alpha+t}-\left(K\frac{\partial H}{\partial x}\right)_\alpha\right\},$$

potremo sostituire nelle stesse espressioni invece dell'integrale $\int_0^t F(\alpha+t)\,H(z,\alpha+t)\,d\,t$ la quantità perfettamente conosciuta

$$-\frac{1}{\nu(z)}\left\{\left(K\frac{\partial\,H}{\partial\,x}\right)_{\alpha+t}-\left(K\frac{\partial\,H}{\partial\,x}\right)_\alpha\right\}.$$

Quando però dopo di aver fatta questa sostituzione la determinazione di $\varphi(z)$, o lo studio delle espressioni precedenti

riesca difficile, allora potrà tornar comodo di non fare la sostituzione medesima e non eseguire la integrazione rispetto a t; lasciando cioè il $\varphi'(z)$ sotto le forme che si ottengono dalle (79) o (82) col cambiarvi λ_n in z, o sotto forme simili, e poi nelle varie formole incominciando coll' eseguire le integrazioni rispetto a x, invece che rispetto a t, ec.., come chiaramente apparirà nel trattare il caso speciale di cui fra poco ci occuperemo.

E se le espressioni precedenti, non soddisfaranno alle condizioni che si avevano per la (40) o per la (42), ma presenteranno la particolarità menzionata nel §. 70. allora invece dello sviluppo $\Sigma\, q_n\, \mathrm{H}_n$ per rappresentare $f(x)$ si avrà l' altro simile $-\int_a^b f(x) \left(\frac{\partial \chi_1}{\partial t}\right) d\, x + \Sigma\, q_n\, \mathrm{H}_n$, ove χ_1 ha il significato attribuitogli nel §. 70. medesimo, e le q_n sono date ancora dalla formola (64).

97. Applichiamo ora questi risultati allo sviluppo delle funzioni di una variabile reale $f(x)$ per funzioni $\mathrm{H}(\lambda_n x)$, ove le λ_n sono le radici reali positive e del prim' ordine di una equazione trascendente che verrà poi determinata, e le $\mathrm{H}(zx)$ dipendono per ogni valore di x e di z da una classe di equazioni differenziali della solita forma:

$$\frac{\partial\left(\mathrm{K}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x}\right)}{\partial x} + \left\{ \mathrm{F}(x)\, \nu(z) + \mathrm{F}_1(x) \right\} \mathrm{H} = 0.$$

Giova prima però determinare quali siano queste equazioni e fare un breve studio su esse; e per questo osserveremo che ponendo $z\, x = \xi$, e indicando con K' la derivata di K rispetto ad x, dovrà aversi:

$$\xi^2 \frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial \xi^2} + \frac{\mathrm{K}' x}{\mathrm{K}}\, \xi\, \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \xi} + \left\{ \frac{\mathrm{F}(x)\, x^2}{\mathrm{K}}\, \nu\left(\frac{\xi}{x}\right) + \frac{\mathrm{F}_1(x)\, x^2}{\mathrm{K}} \right\} \mathrm{H} = 0,$$

ove H ora è funzione della sola ξ; e quindi, dando ad x un valore costante qualunque e indicando con a, b e c coefficienti

costanti, e con $\mu(\xi)$ una funzione conveniente di ξ, si vede che $H(\xi)$ dovrà soddisfare a una equazione della forma:

$$\xi^2 \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} + a \xi \frac{\partial H}{\partial \xi} + [b \mu(\xi) + c] H = 0,$$

donde, tornando a porre zx al posto di ξ, si ottiene l'altra:

$$x^2 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + a x \frac{\partial H}{\partial x} + [b \mu(zx) + c] H = 0,$$

ovvero, moltiplicando per x^{a-2}:

$$\frac{\partial \left(x^a \frac{\partial H}{\partial x}\right)}{\partial x} + [b x^{a-2} \mu(zx) + c x^{a-2}] H = 0,$$

essendo ora H funzione di zx.

Ne segue che la equazione data deve necessariamente avere questa forma, e quindi deve essere:

$$F(x) \nu(z) + F_1(x) = b x^{a-2} \mu(zx) + c x^{a-2},$$

da cui:

$$F(x) \nu'(z) = b x^{a-1} \mu'(zx), \text{ ovvero } \mu'(zx) = \frac{F(x)}{b x^{a-1}} \nu'(z),$$

ciò che porta che sia:

$$\frac{x \left[\frac{F(x)}{b x^{a-1}}\right]'}{\left[\frac{F(x)}{b x^{a-1}}\right]} = \frac{z \nu''(z)}{\nu'(z)} = a_1,$$

ovvero:

$$\frac{F(x)}{b x^{a-1}} = d x^{a_1}, \quad \nu'(z) = d_1 z^{a_1}, \quad \mu'(zx) = d d_1 (zx)^{a_1},$$

essendo a_1, d, d_1 costanti arbitrarie; quindi, se a_1 non è -1

dovrà essere $\mu(zx) = \frac{d\,d_1}{a_1+1}(zx)^{a_1+1} + d_2$, e se $a_1 = -1$ dovrà essere $\mu(zx) = d\,d_1 \log zx + d_2$, con d_2 nuova costante arbitraria, per modo che le sole equazioni che potrebbero ora considerarsi quando H è funzione di zx, sono le seguenti:

$$(84)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\left(x^a \dfrac{\partial H}{\partial x}\right)}{\partial x} + x^{a-2}\left(b\, x^{a_1+1} z^{a_1+1} + c\right) H = 0, \\ \dfrac{\partial\left(x^a \dfrac{\partial H}{\partial x}\right)}{\partial x} + x^{a-2}(b \log x\, z + c)\, H = 0, \end{cases}$$

con a, b, c, a_1 costanti arbitrarie l'ultima delle quali è differente da -1; e quando H è funzione della sola variabile x (o per $z = 1$) esse si riducono alle altre:

$$(85)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\left(x^a \dfrac{\partial H}{\partial x}\right)}{\partial x} + x^{a-2}(b x^{a_1+1} + c)\, H = 0, \\ \dfrac{\partial\left(x^a \dfrac{\partial H}{\partial x}\right)}{\partial x} + x^{a-2}(b \log x + c)\, H = 0, \end{cases}$$

la prima delle quali quando $a = c = 0$, $a_1 = b = 1$ si riduce a quella che definisce le funzioni sen x e cos x, e quando $a = a_1 = b = 1$, $c = -\nu^2$ si riduce a quella che definisce la funzione di Bessel $I_\nu(x)$.

98. Noi qui ci occuperemo soltanto della prima di queste equazioni; e allora volendo fare sparire il termine $c\,x^{a-2}$ si porrà come al §. 94. $P = \frac{H(zx)}{\tau}$, essendo τ una funzione di x determinata dalla equazione:

$$\frac{\partial\left(x^a \dfrac{\partial \tau}{\partial x}\right)}{\partial x} + x^{a-2}\left(c + c' x^{a_1+1}\right)\tau = 0,$$

ove c' è una costante arbitraria che gioverà prendere uguale a zero, per modo che si abbia:

$$(86)\qquad \frac{\partial\left(x^{a}\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)}{\partial x}+c\,\tau\,x^{a-2}=0\,,$$

e così la prima delle equazioni (84) si ridurrà alla seguente:

$$\frac{\partial\left(x^{a}\tau^{2}\frac{\partial P}{\partial x}\right)}{\partial x}+\tau^{2}b\,x^{a+a_1-1}z^{a_1+1}P=0\,.$$

Ora, se m_1 e m_2 sono le due radici della equazione $m^2-(1-a)\,m+c=0$, si vede subito che $\tau=Ax^{m_1}+Bx^{m_2}$, con A e B costanti arbitrarie, soddisfa alla equazione (86); e noi, supposte m_1 e m_2 reali, prenderemo $\tau=x^{m_1}$; e così ponendo $2\,\nu=2\,m_1+a-1$, $2\,\mu=a_1+1$, la equazione ultima diverrà:

$$\frac{\partial\left(x^{2\nu+1}\frac{\partial P}{\partial x}\right)}{\partial x}+b\,z^{2\mu}x^{2\mu+2\nu-1}P=0\,,$$

ovvero:

$$x\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+(2\,\nu+1)\frac{\partial P}{\partial x}+b\,z^{2\mu}x^{2\mu-1}\,P=0\,,$$

donde, applicando il processo d'integrazione per serie colla formola di Taylor, e facendo le verificazioni richieste da questo processo, si trova con facilità che se μ è diverso da zero e positivo e $\frac{\nu}{\mu}$ non è un numero intero negativo, uno degli integrali $P_{m_1}(zx)$ di questa equazione è dato dalla formola:

$$P_{m_1}(zx)=P_0\left\{1-\frac{b(zx)^{2\mu}}{2.\mu(2\nu+2\mu)}+\frac{b^2(zx)^{4\mu}}{2.4.\mu^2(2\nu+2\mu)(2\nu+4\mu)}-\right.$$
$$\left.-\frac{b^3(zx)^{6\mu}}{2.4.6.\mu^3(2\nu+2\mu)(2\nu+4\mu)(2\nu+6\mu)}+\cdots\right\}\,,$$

e $x^{m_1} \mathrm{P}_{m_1}(x)$ viene ad essere un integrale della prima delle equazioni (85), come $(zx)^{m_1}\mathrm{P}_{m_1}(zx)$ lo è della prima delle (84).

Osservando dunque che, essendo $m_1+m_2=1-a$ i due numeri $2m_1+a-1$, $2m_2+a-1$ sono ambedue zero se $m_1=m_2$, e negli altri casi sono uguali e di segno contrario, si vede subito che insieme a $2\nu=2m_1+a-1$, noi possiamo porre $-2\nu=2m_2+a-1$; e allora, avendosi $m_1=\frac{1-a}{2}+\nu$, $m_2=\frac{1-a}{2}-\nu$, e quindi $c=m_1m_2=\left(\frac{1-a}{2}\right)^2-\nu^2$, la prima delle equazioni (85) coll' introduzione della costante ν invece di c, assumerà la forma seguente:

$$\text{(87)}\qquad \frac{\partial\left(x^a\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x}\right)}{\partial x}+x^{a-2}\left\{bx^{2\mu}+\left(\frac{1-a}{2}\right)^2-\nu^2\right\}\mathrm{H}=0,$$

nella quale ci limiteremo a supporre a e b reali e μ diverso da zero e positivo.

E per quanto abbiamo visto, noi potremo intanto asserire che se il rapporto $\frac{\nu}{\mu}$ è un numero diverso da zero e fratto, e A e B sono due costanti arbitrarie, i due integrali della equazione (87) che quì consideriamo sono i seguenti:

$$\mathrm{A}x^{\frac{1-a}{2}+\nu}\left\{1-\frac{b\,x^{2\mu}}{2.\mu(2\nu+2\mu)}+\frac{b^2x^{4\mu}}{2.4.\mu^2(2\nu+2\mu)(2\nu+4\mu)}-\right.$$

$$\left.-\frac{b^3x^{6\mu}}{2.4.6\,\mu^3(2\nu+2\mu)(2\nu+4\mu)(2\nu+6\mu)}+\ldots\right\},$$

$$\mathrm{B}x^{\frac{1-a}{2}-\nu}\left\{1-\frac{bx^{2\mu}}{2.\mu(-2\nu+2\mu)}+\frac{b^2x^{4\mu}}{2.4.\mu^2(-2\nu+3\mu)(-2\nu+4\mu)}-\right.$$

$$\left.-\frac{b^3x^{6\mu}}{2.4.6.\mu^3(-2\nu+2\mu)(-2\nu+4\mu)(-2\nu+6\mu)}+\ldots\right\},$$

che possono indicarsi con $A\,x^{\frac{1-a}{2}+\nu} P_{\nu,\mu}(x)$, $B\,x^{\frac{1-a}{2}-\nu} P_{-\nu,\mu}(x)$, essendo A e B costanti arbitrarie e $P_{\nu,\mu}(x)$, $P_{-\nu,\mu}(x)$ le quantità fra parentesi che sono integrali delle respettive equazioni:

$$x\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+(2\nu+1)\frac{\partial P}{\partial x}+b\,x^{2\mu-1}P=0, \qquad x\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}-(2\nu-1)\frac{\partial P}{\partial x}+b\,x^{2\mu-1}P=0;$$

mentre se il rapporto $\frac{\nu}{\mu}$ è zero i due integrali precedenti soddisfano ancora alla (87) ma si riducono ad un solo, e se $\frac{\nu}{\mu}$ è diverso da zero ed è intero, uno degli stessi integrali soddisfa ancora alla equazione stessa (87) ma l'altro perde ogni significato, e quest' ultimo è quello per il quale il rapporto corrispondente $\frac{\nu}{\mu}$ o $-\frac{\nu}{\mu}$ è un numero intero diverso da zero e negativo; talchè fatta eccezione per quest' ultimo caso, i due integrali H della equazione (87) non differiscono che per un fattore da quelle funzioni che ora abbiamo indicato con $P_{\nu,\mu}$, e d' ora innanzi basterà che noi introduciamo queste ultime nei nostri calcoli.

99. Occupandoci ora delle funzioni $P_{\nu,\mu}$ per le quali μ è diverso da zero e positivo e $\frac{\nu}{\mu}$ se è negativo non è intero, giova premettere alcune loro proprietà prima di passare alla questione che vogliamo trattare degli sviluppi della solita funzione $f(x)$ per serie di funzioni $P_{\nu,\mu}(\lambda_n x)$ o $\frac{H_{\nu,\mu}(\lambda_n x)}{x^{\frac{1-a}{2}+\nu}}$, o anche se vuolsi per serie di funzioni

$$\frac{H_{\nu,\mu}(\lambda_n x)}{(\lambda_n x)^{\frac{1-a}{2}+\nu}}.$$

Serviamoci perciò della variabile z invece che di x o di sx, e osserviamo in primo luogo che si ha:

$$P_{\nu,\mu}(z)=1-\frac{b\,z^{2\mu}}{2.\,\mu(2\nu+2\mu)}+\frac{b^2 z^{4\mu}}{2.\,4.\mu^2(2\nu+2\mu)\,(2\nu+4\mu)}-$$
$$-\frac{b^3 z^{6\mu}}{2.4.6.\mu^3(2\nu+2\mu)(2\nu+4\mu)(2\nu+6\mu)}+\ldots,$$

e $P_{\nu,\mu}(z)$ soddisfa alla equazione:

$$(88)\qquad z\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}+(2\nu+1)\frac{\partial P}{\partial z}+bz^{2\mu-1}P=0,\ \text{o}\ \frac{\partial\left(z^{2\nu+1}\frac{\partial P}{\partial z}\right)}{\partial z}+b\,z^{2\nu+2\mu-1}P=0,$$

intendendo sempre che anche se μ è un numero fratto e $z=\rho e^{\theta i}$ sia $z^{\mu}=\rho^{\mu}e^{\mu\theta i}$, ec.

Avendosi poi dalla precedente:

$$P'_{\nu,\mu}(z)=-\frac{b\,z^{2\mu-1}}{2\nu+2\mu}\left\{1-\frac{bz^{2\mu}}{2.\mu(2\nu+2\mu+2\mu)}+\right.$$
$$\left.+\frac{b^2z^{4\mu}}{2.4.\mu^2(2\nu+2\mu+2\mu)(2\nu+2\mu+4\mu)}-\ldots\right\},$$

si trova subito la formola notevole:

$$(89)\qquad P'_{\nu,\mu}(z)=-\frac{bz^{2\mu-1}}{2\nu+2\mu}P_{\nu+\mu,\mu}(z),$$

che esprime la derivata di $P_{\nu,\mu}(z)$ per la funzione $P_{\nu+\mu,\mu}(z)$; e poichè questa formola ci dà:

$$P''_{\nu,\mu}(z)=-\frac{(2\mu-1)bz^{2\mu-2}}{2\nu+2\mu}P_{\nu+\mu,\mu}(z)-\frac{b\,z^{2\mu-1}}{2\nu+2\mu}P'_{\nu+\mu,\mu}(z)=$$
$$=-\frac{(2\mu-1)bz^{2\mu-2}}{2\nu+2\mu}P_{\nu+\mu,\mu}(z)+\frac{b^2z^{4\mu-2}}{(2\nu+2\mu)(2\nu+4\mu)}P_{\nu+2\mu,\mu}(*),$$

eliminando con queste $P'_{\nu,\mu}(z)$ e $P''_{\nu,\mu}(z)$ dalla (88) si ottiene l' altra:

$$(90)\qquad P_{\nu,\mu}(z)=P_{\nu+\mu,\mu}(z)-\frac{b z^{2\mu}}{(2\nu+2\mu)(2\nu+4\mu)}P_{\nu+2\mu,\mu}(z),$$

che esprime la $P_{\nu,\mu}(z)$ per le due $P_{\nu+\mu,\mu}(z)$, $P_{\nu+2\mu,\mu}(z)$, i cui indici sono superiori di μ e di 2μ.

Osservando poi che dalla (89) si ha:

$$P'_{\nu+\mu,\mu}(z)=-\frac{b z^{2\mu-1}}{2\nu+4\mu}P_{\nu+2\mu,\mu}(z),$$

e sostituendo nella precedente si trova anche l' altra:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left\{z^{2\nu+2\mu}P_{\nu+\mu,\mu}(z)\right\}=(2\nu+2\mu)z^{2\nu+2\mu-1}P_{\nu,\mu}(z)$$

che è pure notevole.

100. Aggiungiamo che potendo scrivere:

$$P_{\nu,\mu}(z)=1-\frac{b\left(\frac{z^{\mu}}{\mu}\right)^{2}}{2\left(2\frac{\nu}{\mu}+2\right)}+\frac{b^{2}\left(\frac{z^{\mu}}{\mu}\right)^{4}}{2.4\left(2\frac{\nu}{\mu}+2\right)\left(2\frac{\nu}{\mu}+4\right)}-$$

$$-\frac{b^{3}\left(\frac{z^{\mu}}{\mu}\right)^{6}}{2.4.6\left(2\frac{\nu}{\mu}+2\right)\left(2\frac{\nu}{\mu}+4\right)\left(2\frac{\nu}{\mu}+6\right)}+\ldots$$

si vede subito che si ha $P_{\nu,\mu}(z)=P_{\frac{\nu}{\mu},1}\left(\frac{z^{\mu}}{\mu}\right)$, talchè propriamente quando siano studiate le $P_{\nu,1}(z)$ lo sono anche le $P_{\nu,\mu}(z)$.

Noi per questo d'ora innanzi non ci occuperemo altro che

delle $P_{\nu,1}(z)$, che indicheremo più semplicemente con $P_\nu(z)$, giacchè quando dalle formole che contengono queste $P_\nu(z)$ vorremo passare alle corrispondenti per le $P_{\nu,\mu}(z)$ basterà cambiare in esse il ν in $\frac{\nu}{\mu}$ e il z in $\frac{z^\mu}{\mu}$.

E siccome queste funzioni $P_\nu(z)$ vengono a soddisfare alla equazione:

$$(91)\qquad z\frac{\partial^2 P_\nu(z)}{\partial z^2}+(2\nu+1)\frac{\partial P_\nu(z)}{\partial z}+bzP(z)=0$$

che risulta dalla (88) facendovi $\mu=1$, e sono date dalla serie:

$$(92)\qquad P_\nu(z)=1-\frac{b z^2}{2(2\nu+2)}+\frac{b^2 z^4}{2.4(2\nu+2)(2\nu+4)}-\\ -\frac{b^3 z^6}{2.4.6(2\nu+2)(2\nu+4)(2\nu+6)}+\cdots;$$

si vede chiaramente che all'infuori di un fattore costante esse corrispondono a $z^{-\nu} I_\nu\left(\sqrt{b}\, z\right)$, essendo $I_\nu(x)$ una funzione di Bessel; talchè in sostanza gli sviluppi che poi troveremo per funzioni P_ν saranno sviluppi per funzioni di Bessel.

101. Ricordando ora che per $\nu>-\frac{1}{2}$ si ha:

$$I_\nu(z)=A z^\nu\int_0^\pi \cos(z\cos\omega)\,\mathrm{sen}^{2\nu}\omega\, d\omega,$$

ove A è una costante, si può affermare che quando $\nu>-\frac{1}{2}$ sarà:

$$(93)\qquad P_\nu(z)=k_\nu\int_0^\pi \cos(z\cos\omega)\,\mathrm{sen}^{2\nu}\omega\, d\omega,$$

ove k_ν è un coefficiente costante che è uguale all' inversa dell' integrale $\int_0^\pi \operatorname{sen}^{2\nu}\omega\, d\,\omega$, o a $\frac{\Gamma(2\nu+1)}{2^{2\nu}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)^2}$, essendo Γ il noto simbolo degli integrali Euleriani di seconda specie, e per semplicità si è supposto $b=1$ senz' altro, non avendo del resto che da cambiare z in $\sqrt{b}\,z$ quando si voglia tornare a introdurre in calcolo il numero b.

Posto poi $\cos\omega = v$, e a $\cos v\, z$ sostituito il suo valore per esponenziali, si trova:

$$\frac{P_\nu(z)}{k_\nu} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{ivz}(1-v^2)^{\nu-\frac{1}{2}}d\,v + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-ivz}(1-v^2)^{\nu-\frac{1}{2}}d\,v =$$

$$= \int_{-1}^{1} e^{\pm ivz}(1-v^2)^{\nu-\frac{1}{2}}dv,$$

ove s'intende che $(1-v^2)^{\nu-\frac{1}{2}}$ per $v=0$ si riduca all' unità positiva; e da questa formola, che vale quando $\nu > -\frac{1}{2}$ e qualunque sia z, ci sarà facile dedurre un' altra espressione di $P_\nu(z)$ per la quale basterà supporre che ν non sia un numero intero negativo, ma bisognerà per essa che z sia diverso da zero e abbia un argomento θ che non supera $\frac{\pi}{2}$ in valore assoluto, per modo cioè che i punti z corrispondenti cadano a destra dell' asse delle y, o su quest' asse ($z=0$ escl.).

102. Supponendo perciò ancora $\nu > -\frac{1}{2}$, prendiamo a considerare l' integrale $\int e^{-wz}(1+w^2)^{\nu-\frac{1}{2}}dw$, ove w è una variabile complessa $u+iv$, estendendolo a un rettangolo coi

lati paralleli agli assi u e v e coi vertici nei punti $w=-i$, $w=i$, $w=i+k$, $w=k-i$, essendo k un numero positivo grande ad arbitrio, e intendendo che $(1+w^2)^{\nu-\frac{1}{2}}$ per $w=0$ sia l'unità positiva.

Siccome movendosi entro il rettangolo indicato non si gira attorno ai punti $w=\pm i$ che sono i soli che possono produrre singolarità nella funzione $e^{-wz}(1+w^2)^{\nu-\frac{1}{2}}$, e siccome quand' anche in questi punti $\pm i$ la funzione stessa divenga infinita, essa lo diviene d' ordine inferiore al primo perchè per ora si ha $\nu>-\frac{1}{2}$, è certo che l'integrale $\int e^{-wz}(1+w^2)^{\nu-\frac{1}{2}}dw$ esteso al contorno del medesimo rettangolo sarà uguale a zero, e quindi si avrà:

$$0=i\int_{-1}^{1}e^{-ivz}(1-v^2)^{\nu-\frac{1}{2}}dv+\int_0^k e^{-(u+i)z}\{1+(u+i)^2\}^{\nu-\frac{1}{2}}du+$$

$$+\int_1^{-1}e^{-(k+iv)z}\{1+(k+iv)^2\}^{\nu-\frac{1}{2}}dv+\int_k^0 e^{-(u-i)z}\{1+(u-i)z\}^{\nu-\frac{1}{2}}du;$$

e poichè, supponendo che l' indice di z sia situato a destra dell' asse delle y per modo che la parte reale di z venga ad essere positiva, si vede subito che al crescere sempre più del numero positivo k il terzo integrale finirà per avere un modulo piccolo a piacere, mentre il secondo e il quarto hanno un valore determinato anche per $k=\infty$, è certo che sarà:

$$\int_{-1}^{1}e^{-ivz}(1-v^2)^{\nu-\frac{1}{2}}dv=i\int_0^\infty e^{-uz}\left[e^{-iz}\{1+(u+i)\}^{\nu-\frac{1}{2}}-e^{iz}\{1+(u-i)^2\}^{\nu-\frac{1}{2}}\right]du,$$

donde si ottiene subito:

$$P_\nu(z)=ik_\nu\int_0^\infty e^{-uz}\left[e^{-iz}[1+(u+i)^2]^{\nu-\frac{1}{2}}-e^{iz}[1+(u-i)^2]^{\nu-\frac{1}{2}}\right]du,$$

per una nuova espressione di $P_\nu(z)$ che vale quando $\nu > -\frac{1}{2}$ e z è a destra dell'asse delle y (quest'asse ora escl.).

Ora, quando z è reale e positivo, possiamo porre $uz=\tau$; e allora sviluppando i quadrati fra parentesi, e facendo altri calcoli semplici, con osservare anche che, essendo

$\pm i = e^{\pm\frac{\pi i}{2}}$ può scriversi $(\pm i)^{\nu-\frac{1}{2}} = e^{\pm\frac{2\nu-1}{4}\pi i}$, ec. si avrà:

$$P_\nu(z)=k_\nu \frac{2^{\nu-\frac{1}{2}}}{z^{\nu+\frac{1}{2}}}\int_0^\infty e^{-\tau}\tau^{\nu-\frac{1}{2}}\left\{e^{-i\left(z-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)}\left(1-\frac{i\tau}{2z}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}+\right.$$

$$\left.+e^{i\left(z-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)}\left(1+\frac{i\tau}{2z}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}\right\}d\tau,$$

e quindi sarà:

$$(94)\quad P_\nu(z)=k_\nu\frac{2^{\nu-\frac{1}{2}}}{z^{\nu+\frac{1}{2}}}\left[\cos\left(z-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)\int_0^\infty e^{-\tau}\tau^{\nu-\frac{1}{2}}\left\{\left(1+\frac{i\tau}{2z}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}+\left(1-\frac{i\tau}{2z}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}\right\}d\tau\right.$$

$$\left.+i\,\mathrm{sen}\left(z-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)\int_0^\infty e^{-\tau}\tau^{\nu-\frac{1}{2}}\left\{\left(1+\frac{i\tau}{2z}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}-\left(1-\frac{i\tau}{2z}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}\right\}d\tau\right]$$

ove le due quantità $\left(1-\frac{i\tau}{2z}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}$, $\left(1+\frac{i\tau}{2z}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}$ per $z=\pm i\tau$ s'intende che si riducano a $2^{\nu-\frac{1}{2}}$ onde resti soddisfatta la condizione che $(1+w^2)^{\nu-\frac{1}{2}}$ si riduca all'unità per $w=0$; e questa

formola che ora è dimostrata soltanto quando z è reale e positivo, è facile vedere che vale per qualunque valore di z diverso da zero il cui indice è a destra dell'asse delle y o su quest' asse (*).

Si consideri infatti sul piano $u+iv$ a destra dell' asse v un contorno formato dall' asse u, da una retta che passi per l'origine e faccia l'angolo γ con quest'asse, e dall'arco di cerchio di raggio r racchiuso fra queste rette col centro all' origine; e si prendano a studiare gli integrali

$$\int e^{-wz\mp iz} \{1+(w\pm i)^2\}^{\nu-\frac{1}{2}} dw \text{ estesi a questo contorno .}$$

Posto $w=\mathrm{R}\,e^{\omega i}$, sul cerchio si avrà $w=r\,e^{i\omega}$, $d\,w=i\,w\,d\,\omega$; sulla retta γ si avrà $w=\mathrm{R}\,e^{i\gamma}$, $dw=e^{i\gamma}d\mathrm{R}$; e sull'asse u si avrà $w=u$, $dw=du$; quindi, se $z=\rho\,e^{i\theta}$ sarà:

$$\int_0^r e^{-uz\mp iz}[1+(u\pm i)^2]^{\nu-\frac{1}{2}} du+i\int_0^\gamma r\,e^{-r\rho\,e^{i(\theta+\omega)}+i\omega\mp iz}[1+$$

$$+(r\,e^{i\omega}\pm i)^2]^{\nu-\frac{1}{2}} d\omega+\int_r^0 e^{-wz\mp iz}[1+(w\pm i)^2]^{\nu-\frac{1}{2}} dw=0,$$

essendo nel terzo integrale $w=\mathrm{R}\,e^{i\gamma}$, $dw=e^{i\gamma}d\mathrm{R}$; e se l'argomento $\theta+\omega$ del prodotto wz entro l' indicato spazio è sempre compreso fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ (gli estr. escl.), il secondo integrale al crescere indefinito di r quando ρ è diverso da zero avrà per limite zero, e quindi sarà:

$$\int_0^\infty e^{-uz\mp iz}[1+(u\pm i)^2]^{\nu-\frac{1}{2}} d\,u=\int_0^\infty e^{-w\,z\mp iz}[1+(w\pm i)^2]^{\nu-\frac{1}{2}} dw$$

(*) Fino a questo punto il processo seguito per giungere alla formola (94) concorda con quello tenuto da Lipschitz alla pag. 189 e seg. del vol. 56 del giornale di Borchardt nello studio corrispondente sulle funzioni di Bessel. Lipschitz limita così i suoi risultati al caso di z reale e positivo.

ove l' integrale del secondo membro è esteso alla retta γ; dal chè apparisce che quando θ è compreso fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ (gli estr. escl.) l' integrale del primo membro anzichè alla retta u della quantità reali può anche intendersi esteso a una retta qualunque che faccia con questa un angolo γ pel quale $\gamma+\theta$ sia compreso fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ (gli estr. $\pm\frac{\pi}{2}$ escl.).

In ogni caso dunque quando θ è compreso fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ (gli estr. $\pm\frac{\pi}{2}$ escl.) si potrà prendere $\gamma=-\theta$, e allora sarà:

$$\int_0^\infty e^{-uz\mp iz}[1+(u\pm i)^2]^{\nu-\frac{1}{2}}du= e^{-i\theta}\int_0^\infty e^{-R\rho\mp iz}[1+(R\, e^{-i\theta}\pm i)^2]^{\nu-\frac{1}{2}}dR$$

e ora, potendo porre $R\rho=\tau$, si trova:

$$\int_0^\infty e^{-uz\mp iz}[1+(u\pm i)^2]^{\nu-\frac{1}{2}}du=\frac{1}{z}\int_0^\infty e^{-\tau\mp iz}\left\{1+\left(\frac{\tau}{z}\pm i\right)^2\right\}^{\nu-\frac{1}{2}}d\tau,$$

e questa evidentemente ci riconduce alla formola (94) che resta così dimostrata per tutti i punti z il cui indice è a destra dell'asse delle y (quest'asse per ora escl.).

Se poi si osserva che la funzione $P_\nu(z)$ è sempre finita e continua, e se $\nu>-\frac{1}{2}$ gli integrali che figurano nella (94) conservano un significato anche quando, essendo $\theta=\pm\frac{\pi}{2}$, si ha $z=\pm i\rho$ con ρ diverso da zero, e allora essi sono i limiti per $\theta=\pm\frac{\pi}{2}$ degli integrali che corrispondono a θ compreso fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, se ne concluderà subito che la formola (94) vale anche sull' asse delle y quando si escluda soltanto il punto $z=0$,

e così la nostra dimostrazione può dirsi ora completa nel caso sempre di $\nu > -\frac{1}{2}$.

101. Giova ora trasformare nella (94) i coefficienti di $\cos\left(z-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)$, e $\operatorname{sen}\left(z-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)$ quando il modulo ρ di z è abbastanza grande e θ è fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ (gli estr. incl.), restando sempre per ora $\nu > -\frac{1}{2}$.

Per questo osserveremo che si ha;

$$\int_0^\infty e^{-\tau} \tau^{\nu-\frac{1}{2}} \left(1 \pm \frac{i\tau}{2z}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} d\tau = \left(\int_0^{2\rho} + \int_{2\rho}^\infty\right) e^{-\tau} \tau^{\nu-\frac{1}{2}} \left(1 \pm \frac{i\tau}{2z}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} d\tau,$$

e nei due integrali del secondo membro sarà respettivamente:

$$\left(1 \pm \frac{i\tau}{2z}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} = \sum_0^\infty \left(\nu-\frac{1}{2}\right)_n \left(\pm\frac{i\tau}{2z}\right)^n, \quad \left(1 \pm \frac{i\tau}{2z}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} = \left(\pm\frac{i\tau}{2z}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} \sum_1^\infty \left(\nu-\frac{1}{2}\right)_n \left(\pm\frac{2z}{i\tau}\right)^n,$$

quando si prenda un valore conveniente per $\left(\pm\frac{i\tau}{2z}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}$, e s'intenda che $(\nu-\frac{1}{2})_n$ siano i soliti coefficienti binomiali; quindi, poichè si riscontra subito che a queste serie è applicabile la integrazione termine a termine da 0 a 2ρ e da 2ρ a ∞ respettivamente, si avrà:

$$(95) \quad \int_0^\infty e^{-\tau} \tau^{\nu-\frac{1}{2}} \left(1 \pm \frac{i\tau}{2z}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} d\tau = \sum_0^\infty \left(\nu-\frac{1}{2}\right)_n \left(\pm\frac{i}{2z}\right)^n \int_0^{2\rho} e^{-\tau} \tau^{\nu-\frac{1}{2}+n} d\tau +$$

$$+ \left(\pm\frac{i}{2z}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} \sum_0^\infty \left(\nu-\frac{1}{2}\right)_n \left(\pm\frac{2z}{i}\right)^n \int_{2\rho}^\infty e^{-\tau} \tau^{\nu-\frac{1}{2}-n} d\tau.$$

Ora, si osservi in generale che qualunque sia il numero k si ha per ρ assai grande:

$$\int_{2\rho}^{\infty} e^{-\tau}\tau^{k}\,d\tau = \int_{2\rho}^{\infty} e^{-\tau}\tau^{k+2}\frac{d\tau}{\tau^{2}} < e^{-2\rho}(2\rho)^{k+2}\int_{2\rho}^{\infty}\frac{d\tau}{\tau^{2}},$$

ovvero:

$$\int_{2\rho}^{\infty} e^{-\tau}\tau^{k}\,d\tau < e^{-2\rho}(2\rho)^{k+1},$$

per modo che, qualunque sia k, purchè finito, gli integrali $\int_{2\rho}^{\infty} e^{-\tau}\tau^{k} d\tau$ al crescere indefinito di ρ divengono infinitesimi di ordine grande quanto si vuole in confronto a $\frac{1}{\rho}$.

Oltre a ciò si ha:

$$\int_{0}^{2\rho} e^{-\tau}\tau^{\nu-\frac{1}{2}+n}\,d\tau = \left(\int_{0}^{\infty} - \int_{2\rho}^{\infty}\right) e^{-\tau}\tau^{\nu+\frac{1}{2}+n-1}\,d\tau = \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}+n\right) -$$

$$- \int_{2\rho}^{\infty} e^{-\tau}\tau^{\nu-\frac{1}{2}+n}\,d\tau,$$

$$\int_{2\rho}^{\infty} e^{-\tau}\tau^{\nu-\frac{1}{2}-n}\,d\tau = \int_{2\rho}^{\infty} e^{-\tau}\frac{\tau^{\nu+\frac{1}{2}+q}}{\tau^{n+q+1}} = \varepsilon_q \int_{2\rho}^{\infty}\frac{d\tau}{\tau^{n+q+1}} =$$

$$= \frac{\varepsilon_q}{(n+q)\,(2\rho)^{n+q}},$$

con $\varepsilon_q < e^{-2\rho}(2\rho)^{\nu+\frac{1}{2}+q}$ qualunque siano i numeri n e q purchè $n+q$ sia diverso da zero e positivo e ρ sia abbastanza grande; e inoltre per $n > q'$ si ha:

$$\int_0^{2\rho} e^{-\tau} \tau^{\nu-\frac{1}{2}+n} d\tau = \int_0^{2\rho} e^{-\tau} \tau^{\nu+\frac{1}{2}+q'} \tau^{n-q'-1} d\tau = \varepsilon_{q'} \int_0^{2\rho} \tau^{n-q'-1} d\tau =$$

$$= \frac{\varepsilon_{q'}}{(2\rho)^{q'}} \frac{(2\rho)^n}{n-q'},$$

essendo $\varepsilon_{q'}$ inferiore al massimo dei valori che prende $e^{-\tau} \tau^{\nu+\frac{1}{2}+q'}$ per τ compreso fra 0 e 2ρ, il quale si vede subito essere $\left(\frac{\nu+\frac{1}{2}+q'}{2}\right)^{\nu+\frac{1}{2}+q'}$; dunque si potrà scrivere evidentemente:

$$\int_0^{\infty} e^{-\tau} \tau^{\nu-\frac{1}{2}} \left(1 \pm \frac{i\tau}{2z}\right)^{\nu+\frac{1}{2}} d\tau = \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right) + \theta_0 \pm \left(\nu-\frac{1}{2}\right)_1 \left[\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}+1\right)+\theta_1\right] \frac{i}{2z} +$$

$$\left(\nu-\frac{1}{2}\right)_2 \left[\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}+2\right)+\theta_2\right] \frac{i^2}{4z^2} + \dots + \left(\nu-\frac{1}{2}\right)_q \left[\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}+q'\right)+\theta_{q'}\right] \left(\frac{\pm i}{2z}\right)^{q'} +$$

$$+ \frac{1}{(2\rho)^{q'}} \sum_{q'+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_{q'} \left(\nu-\frac{1}{2}\right)_n}{n-q'} \left(\frac{\pm i\rho}{z}\right)^n + \left(\frac{\pm i}{2z}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} \frac{1}{(2\rho)^q} \sum_0^{\infty} \frac{\varepsilon_q \left(\nu-\frac{1}{2}\right)_n}{n+q} \left(\pm \frac{z}{i\rho}\right)^n,$$

ove le θ_n sono le quantità infinitesime d'ordine superiore a qualsiasi numero finito $\int_{2\rho}^{\infty} e^{-\tau} \tau^{\nu-\frac{1}{2}+n} d\tau$, e q e q' sono numeri interi positivi qualunque.

Ora, nonostante che le quantità $\pm \frac{i\rho}{z}$, $\pm \frac{z}{i\rho}$ abbiano per modulo l'unità, le serie che compariscono in questa formola sono convergenti e col modulo sempre inferiore a un numero finito, perchè applicando un notissimo teorema di Gauss sulle serie a termini positivi, si riscontra che sono convergenti le

due serie $\sum_{q'+1}^{\infty} \frac{\left(\nu-\frac{1}{2}\right)'_n}{n-q'}$, $\sum_{0}^{\infty} \frac{\left(\nu-\frac{1}{2}\right)'_n}{n+q}$, ove $\left(\nu-\frac{1}{2}\right)'_n$ indica il valore assoluto di $\left(\nu-\frac{1}{2}\right)_n$; dunque evidentemente, sostituendo nella (94) per k_ν e per gli integrali precedenti i loro valori, si può asserire che se $\nu > -\frac{1}{2}$, e z è diverso da zero ed è a destra dell' asse delle y o su quest'asse si ha:

$$P_\nu(z) = \frac{\Gamma(2\nu+1)}{(2z)^{\nu+\frac{1}{2}}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left[\left\{1+\gamma_\nu(z)\right\}\cos\left(z-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)+\gamma'_\nu(z)\,\mathrm{sen}\left(z-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)\right],$$

essendo le $\gamma_\nu(z)$ e $\gamma'_\nu(z)$ funzioni di z che quando il modulo di z cresce indefinitamente divengono ambedue infinitesime degli ordini 2.⁰ e 1.⁰ respettivamente. Oltre a ciò, avendo riguardo alla (94) e allo studio fatto sugli integrali precedenti, si riscontra che almeno quando $\nu > \frac{1}{2}$ queste funzioni $\gamma_\nu(z)$ e $\gamma'_\nu(z)$ hanno una derivata che al crescere indefinito del modulo di z diviene infinitesima dell'ordine 3.⁰ per $\gamma_\nu(z)$ e 2.⁰ per $\gamma'_\nu(z)$.

Nel caso poi che $\nu+\frac{1}{2}$ e $\nu-\frac{1}{2}$ non siano superiori a zero, e ν se è negativo non sia intero, allora servendosi dapprima una o più volte della (90) ove sia fatto $\mu=1$, $b=1$ potremo esprimere $P_\nu(z)$ per funzioni $P_{\nu'}(z)$ per le quali $\nu'+\frac{1}{2}$ e anche $\nu'-\frac{1}{2}$ siano superiori a zero; e dopo applicando a queste funzioni $P_{\nu'}(z)$ la formola precedente, si troverà che questa formola continua a sussistere anche per la $P_\nu(z)$ da cui siamo partiti, quando tutt' al più si ponga sott' altra forma il coefficiente fuori di parentesi, e le $\gamma_\nu(z)$ e le $\gamma'_\nu(z)$ hanno sempre le stesse particolarità; talchè in conclusione noi possiamo dire che per le funzioni $P_\nu(z)$ per le quali ν se è negativo non è intero, quando z è diverso da zero ed è a destra dell' asse delle y o su quest' asse, si avrà sempre:

$$(96)\quad P_\nu(z)=\frac{c_\nu}{z^{\nu+\frac{1}{2}}}\left[\{1+\gamma_\nu(z)\}\cos\left(z-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)+\gamma'_\nu(z)\operatorname{sen}\left(z-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)\right],$$

ove c_ν è un coefficiente costante, e le $\gamma_\nu(z)$, $\gamma'(z)$ al crescere indefinito del modulo di z divengono ambedue infinitesime degli ordini 2.° e 1.° respettivamente, e ammettono una derivata che diviene infinitesima del 3 ° ordine per $\gamma_\nu(z)$ e del 2.° ordine per $\gamma'_\nu(z)$.

Al modo stesso e negli stessi casi si trova che si ha:

$$(97)\quad P'_\nu(z)=-\frac{c_\nu}{z^{\nu+\frac{1}{2}}}\left[\{1+\delta_\nu(z)\}\operatorname{sen}\left(z-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)+\delta'_\nu(z)\cos\left(z-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)\right],$$

ove le $\delta_\nu(z)$ e $\delta'_\nu(z)$ hanno le stesse particolarità delle funzioni $\gamma_\nu(z)$, $\gamma'_\nu(z)$.

104. Ritornando ora nel caso di $\nu>-\frac{1}{2}$, aggiungiamo che cangiando z in βz e poi τ in $\beta\tau$ nella (94) con β diverso da zero e positivo, si trova:

$$P_\nu(\beta z)=k_\nu\frac{2^{\nu-\frac{1}{2}}}{z^{\nu+\frac{1}{2}}}\left[\cos\left(\beta z-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)\int_0^\infty e^{-\beta\tau}\tau^{\nu-\frac{1}{2}}\left\{\left(1+\frac{i\tau}{2z}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}+\left(1-\frac{i\tau}{2z}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}\right\}d\tau+\right.$$

$$\left.+\,i\operatorname{sen}\left(\beta z-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)\int_0^\infty e^{-\beta\tau}\tau^{\nu-\frac{1}{2}}\left\{\left(1+\frac{i\tau}{2z}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}-\left(1-\frac{i\tau}{2z}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}\right\}d\tau\right],$$

e per gli integrali che quì figurano si avrà la formola (95) nella quale sia cangiato $e^{-\tau}$ in $e^{-\beta\tau}$.

Ora si ha:

$$\int_0^{2\rho} e^{-\beta\tau}\tau^{\nu-\frac{1}{2}}d\tau=\theta_0\int_0^\infty e^{-\beta\tau}\tau^{\nu-\frac{1}{2}}\,d\tau=\frac{\theta_0}{\beta^{\nu+\frac{1}{2}}}\quad\Gamma\left(\nu+\tfrac{1}{2}\right),$$

con $0<\theta_0<1$; e per $n>0$ si ha:

$$\int_0^{2\rho} e^{-\beta\tau}\tau^{\nu-\frac{1}{2}+n}d\tau=\int_0^{2\rho} e^{-\beta\tau}\tau^{\nu+\frac{1}{2}}\tau^{n-1}d\tau=\theta_n M\int_0^{2\rho}\tau^{n-1}d\tau=\frac{\theta_n M(2\rho)^n}{n}$$

ove $0<\theta_n<1$, e M è il massimo valore di $e^{-\beta\tau}\tau^{\nu-\frac{1}{2}}$ fra 0 e 2ρ o fra 0 e ∞, di modochè $M=\frac{M_1}{\beta^{\nu+\frac{1}{2}}}$, con $M_1=\left(\frac{\nu+\frac{1}{2}}{e}\right)^{\nu+\frac{1}{2}}$.

Inoltre si ha per $n+q$ diverso da zero e positivo:

$$\int_{2\rho}^{\infty} e^{-\beta\tau}\tau^{\nu-\frac{1}{2}-n}d\tau=\int_{2\rho}^{\infty} e^{-\beta\tau}\tau^{\nu+\frac{1}{2}+q}\frac{d\tau}{\tau^{n+q+1}}=$$

$$=\theta'_n M'\int_{2\rho}^{\infty}\frac{d\tau}{\tau^{n+q+1}}=\frac{\theta'_n M'}{(n+q)(2\rho)^{n+q}},$$

ove al solito $0<\theta'_n<1$, e M′ è il massimo valore di $e^{-\beta\tau}\tau^{\nu+\frac{1}{2}+q}$ fra 0 e ∞, di modo chè $M'=\frac{M_1'}{\beta^{\nu+\frac{1}{2}+q}}$ con $M'_1=\left(\frac{\nu+\frac{1}{2}+q}{e}\right)^{\nu+\frac{1}{2}+q}$; quindi se $\nu-\frac{1}{2}$ è zero o è negativo, prendendo $q=-(\nu-\frac{1}{2})$ si potrà scrivere:

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta\tau}\tau^{\nu-\frac{1}{2}}\left(1\pm\frac{i\tau}{2z}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}d\tau=\frac{1}{\beta^{\nu+\frac{1}{2}}}\left\{\theta\Gamma(\nu+\tfrac{1}{2})+M_1\sum_1^{\infty}\frac{\theta_n(\nu-\frac{1}{2})_n\left(\pm\frac{i\rho}{z}\right)^n}{n}\right\}+$$

$$+\left(\pm\frac{i\rho}{z}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}\frac{M'_1}{\beta}\sum_0^{\infty}\frac{\theta'_n(\nu-\frac{1}{2})_n\left(\pm\frac{z}{i\rho}\right)^n}{n+q};$$

e se $\nu-\frac{1}{2}$ è zero o è positivo potremo prendere $q=0$, e allora sarà:

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta\tau}\tau^{\nu-\frac{1}{2}}\left(1\pm\frac{i\tau}{2z}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}d\tau=\frac{1}{\beta^{\nu+\frac{1}{2}}}\left\{\theta_0\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)+M_1\sum_1^{\infty}\frac{\theta_n\left(\nu-\frac{1}{2}\right)_n\left(\pm\frac{i\rho}{z}\right)^n}{n}\right\}+$$

$$+\frac{1}{\beta^{\nu+\frac{1}{2}}}\left(\frac{\pm i}{2z}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}\left\{\theta'_0\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)+M'_1\sum_1^{\infty}\frac{\theta'_n\left(\nu-\frac{1}{2}\right)_n\left(\pm\frac{z}{i\rho}\right)^n}{n}\right\},$$

con $0<\theta'_0<1$; talchè evidentemente sostituendo nel valore scritto sopra di $P_\nu(\beta z)$ si può affermare che quando $\nu>-\frac{1}{2}$ la funzione $P_\nu(\beta z)$ può porsi sotto la forma:

$$(98)\quad P_\nu(\beta z)=\frac{1}{\beta^{p+\frac{1}{2}}z^{\nu+\frac{1}{2}}}\left\{A_\nu\cos\left(\beta z-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)+B_\nu\,\mathrm{sen}\left(\beta z-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)\right\},$$

ove le A_ν e B_ν sono funzioni di β e di z il cui modulo è sempre inferiore a un numero finito per qualunque valore diverso da zero e positivo (sia pur piccolo quanto si vuole) del numero β, e per qualunque valore di z diverso da zero, e anche di modulo grande quanto si vuole, il cui indice cade a destra dell'asse delle y o su quest' asse; e p è il maggiore dei due numeri $\frac{1}{2}$ e ν.

Osservando poi che a causa della (90) si ha:

$$P_\nu(\beta z)=P_{\nu+1}(\beta z)-\frac{\beta^2 z^2}{(2\nu+2)(2\nu+4)}P_{\nu+2}(\beta z),$$

e se $-1<\nu\leq-\frac{1}{2}$, indicando con $P_{\nu'}$, $P_{\nu''}$ le funzioni $P_{\nu+1}$ $P_{\nu+2}$ del secondo membro, si ha $-\frac{1}{2}<\nu'\leq\frac{1}{2}$, $\nu''>\frac{1}{2}$, si vedrà subito che la formola (98) vale anche nel caso in cui $-1<\nu<-\frac{1}{2}$; e coll' applicazione ripetuta della formola precedente medesima si vede che la (98) stessa vale anche per qualunque valore negativo e non intero di ν.

Osservando poi che la (89) ci dà la formola seguente:

$$P'_\nu(\beta z) = -\frac{\beta^2 z}{2\nu+2} P_{\nu+1}(\beta z),$$

ove $P'_\nu(\beta z)$ indica la derivata di $P_\nu(\beta z)$ presa rispetto a z, si potrà asserire che si ha:

$$(99)\quad P'_\nu(\beta z) = \frac{\beta^{\frac{3}{2}-p'}}{z^{\nu+\frac{1}{2}}}\left[A'_\nu \cos\left(\beta z - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right) + B'_\nu \operatorname{sen}\left(\beta z - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right)\right],$$

ove A'_ν e B'_ν hanno le stesse particolarità delle A_ν e B_ν sopra indicate, e p' e il maggiore dei due numeri $\frac{1}{2}$ e $\nu+1$.

Questi risultati ci saranno utili in seguito.

105. Date ora tutte queste proprietà delle funzioni $P_\nu(z)$, $P'_\nu(z)$, $P_\nu(\beta z)$, $P'_\nu(\beta z)$, passiamo a cercare se la solita funzione reale $f(x)$ della variabile pure reale x possa svilupparsi secondo una serie di funzioni $P_\nu(\lambda_n x)$, o $x^{-\nu} I_\nu(\lambda_n x)$, ove le I_ν sono funzioni di Bessel, supponendo ora però che ν sia superiore a -1, e ammettendo al solito per semplicità che sia $b=1$.

In questo caso, soddisfacendo $P_\nu(zx)$ alla equazione:

$$(100)\qquad \frac{\partial\left[x^{2\nu+1}\frac{\partial P_\nu(zx)}{\partial x}\right]}{\partial x} + x^{2\nu+1} z^2 P_\nu(zx) = 0,$$

le equazioni (67) si ridurranno alle due:

$$x^{2\nu+1}\frac{\partial P_\nu(zx)}{\partial x} - h' P_\nu(zx) = 0 \text{ per } x=a,$$

$$x^{2\nu+1}\frac{\partial P_\nu(zx)}{\partial x} - h P_\nu(zx) = 0 \text{ per } x=b,$$

con h e h' finiti o infiniti, e $P_\nu(zx)$ definito dalla serie che viene dalla (92) cambiandovi z in zx e facendovi $b=1$; quindi poichè,

essendo ora $\nu > -1$, la prima equazione diviene identica qualunque sia z quando si prende $a=0$, $h'=0$, gioverà evidentemente intendere che l' estremo inferiore a dell' intervallo (a,b) nel quale $f(x)$ deve svilupparsi sia lo zero.

Se poi come estremo superiore dello stesso intervallo si prende per semplicità l' unità positiva, le quantità λ_n dovranno essere radici della equazione $\left[x^{2\nu+1}\frac{\partial P_\nu(zx)}{\partial x} - h\,P_\nu(zx)\right]_{x=1} = 0$, ovvero dell' altra:

$$z\frac{\partial P_\nu(z)}{\partial z} - h\,P_\nu(z) = 0, \tag{101}$$

ove h è finito o infinito, e $P_\nu(z)$ è la funzione definita dalla formola (92) e soddisfa alla equazione (91).

Ora, siccome le $P_\nu(zx)$ sono sempre funzioni monodrome finite e continue di z e di x, basta ricordare quanto si disse al §. 92. per concludere subito che la equazione (101) per h finito o infinito, non avrà altro che radici reali e queste radici all'infuori di quella zero che si ha quando $h=0$, saranno tutte semplici e uguali due a due e di segno contrario: dunque noi avremo sempre un sistema di radici reali e positive che potremo prendere per quantità λ_n (*).

Così essendo, noi cercheremo dunque se la solita funzione

(*) Se, invece di considerare le funzioni P_ν, avessimo continuato a considerare le $P_{\nu,\mu}$ saremmo giunti ad una equazione che non sarebbe stata altro che la (101) stessa nella quale a ν, z e h si fossero sostituiti $\frac{\nu}{\mu}$, $\frac{z^\mu}{\mu}$, $\frac{h}{\mu}$. Conseguentemente essa sarebbe stata soddisfatta soltanto da valori reali di $\frac{z^\mu}{\mu}$; e quindi se, invece di considerare, come ora faremo, il campo a destra dell'asse delle y, si fosse considerato quello dei valori $z = \rho e^{i\theta}$ il cui argomento non supera in valore assoluto il numero $\frac{\pi}{2\mu}$, allora, fatta eccezione per la radice zero nel caso di $h=0$, non avremmo avuto in questo campo altro che radici z reali e positive della equazione corrispondente, e queste si sarebbero potute prendere come quantità λ_n.

di una variabile reale $f(x)$ data arbitrariamente fra 0 e 1 possa svilupparsi secondo una serie della forma:

$$\sum_1^\infty q_n P_\nu(\lambda_n x), \text{ con } q_n = \frac{\int_0^1 f(x)\, x^{2\nu+1} P_\nu(\lambda_n x)\, d\, x}{\int_0^1 x^{2\nu+1} P^2_\nu(\lambda_n x)\, d\, x},$$

quando si suppone che il prodotto $f(x)x^{2\nu+1}$ sia atto all' integrazione nell' intervallo da 0 a 1 anche riducendolo ai suoi valori assoluti, e s'intende che le quantità λ_n siano le radici positive della equazione $u(z) = z\frac{\partial P_\nu(z)}{\partial z} - h\, P_\nu(z) = 0$ con h finito, o dell'altra $u(z) = P_\nu(z) = 0$ che corrisponde al caso di $h = \infty$, per modo che verrà già soddisfatta la condizione che le q_n e le $P_\nu(\lambda_n x)$ per x positivo siano reali; e noi per questa ricerca, applicheremo il teorema del §. 69.

106. Supponendo dunque $u(z) = P_\nu(z)$, o $u(z) = zP'_\nu(z) - hP_\nu(z)$, e volendo applicare il teorema del §. 69, dovremo determinare due funzioni $\varphi(z)$ e $\psi(z)$ monodrome e continue a destra dell' asse delle y e su quest'asse e tali che sia:

$$\varphi'(\lambda_n) = \frac{u'(\lambda_n)^2 P_\nu(\lambda_n x) \int_0^t (\alpha+t)^{2\nu+1} P_\nu\{\lambda_n(\alpha+t)\}\, d\, t}{\psi(\lambda_n) \int_0^1 x^{2\nu+1} P^2_\nu(\lambda_n x)\, d\, x},$$

$$\frac{\psi'(\lambda_n)}{\psi(\lambda_n)} = \frac{u''(\lambda_n)}{u'(\lambda_n)};$$

e poi dovremo esaminare la differenza $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} \frac{\varphi(z)\,\psi'(z)}{u'(z)} dz - \sum_1^{m_n} \gamma_r$ come fu detto nel §. 69. stesso.

Ora si ha dalla (68) cambiandovi λ_n in z:

$$\int_0^1 x^{2\nu+1} P^2_\nu(zx)\, dx = \frac{1}{2z}\left\{\frac{\partial P_\nu(zx)}{\partial x}\frac{\partial P_\nu(zx)}{\partial z} - P_\nu(zx)\frac{\partial^2 P_\nu(zx)}{\partial z\,\partial x}\right\}_{x=1} =$$

$$= \frac{1}{2z}\left\{\frac{z}{x}\left(\frac{\partial P_\nu(zx)}{\partial z}\right)^2 - \frac{1}{x} P_\nu(zx)\frac{\partial P_\nu(zx)}{\partial z} - \frac{z}{x} P_\nu(zx)\frac{\partial^2 P_\nu(zx)}{\partial z^2}\right\}_{x=1} =$$

$$= \frac{1}{2z}(zP'^2_\nu - P_\nu P'_\nu - z P_\nu P''_\nu) = \frac{1}{2z}(z P'^2_\nu + 2\nu P_\nu P'_\nu + z P^2_\nu),$$

ove per semplicità con P_ν, P'_ν, P''_ν abbiamo indicato $P_\nu(z)$, $\frac{\partial P_\nu(z)}{\partial z}$, $\frac{\partial^2 P_\nu(z)}{\partial z^2}$; quindi, fermandosi dapprima sul caso di $u(z) = P_\nu(z)$, si può dire che in questo caso sarà:

$$\int_0^1 x^{2\nu+1} P^2_\nu(\lambda_n x)\, dx = \frac{1}{2} P'^2_\nu(\lambda_n) = \frac{1}{2} u'^2(\lambda_n),$$

come sarà anche:

$$\frac{u''(\lambda_n)}{u'(\lambda_n)} = \frac{P''_\nu(\lambda_n)}{P'_\nu(\lambda_n)} = -\frac{2\nu+1}{\lambda_n},$$

e potrà prendersi senz' altro:

$$\psi(z) = \frac{1}{z^{2\nu+1}}, \quad \varphi'(z) = 2z^{2\nu+1} P_\nu(\alpha z)\int_0^t (\alpha+t)^{2\nu+1} P_\nu\{(\alpha+t)z\}\, dt,$$

o anche per la (83):

$$\psi(z) = \frac{1}{z^{2\nu+1}}, \varphi'(z) = -2z^{2\nu} P_\nu(\alpha z)\left\{(\alpha+t)^{2\nu}\frac{\partial P_\nu\{(\alpha+t)z\}}{\partial z} - \alpha^{2\nu}\frac{\partial P_\nu(\alpha z)}{\partial z}\right\},$$

giacchè le singolarità in questo valore di $\varphi'(z)$ non possono aversi altro che per $z=0$, e le potenze di z sono tutte superiori a -1 perchè $\nu > -1$.

Invece nel caso di $u(z) = z P'_\nu(z) - h P_\nu(z)$, con h reale e finito qualunque, si avrà:

$$\int_0^1 x^{2\nu+1} P^2_\nu(\lambda_n x)\, d\, x = \frac{P^2_\nu(\lambda_n)}{2\lambda^2_n} \left\{ h\,(2\,\nu+h)+\lambda^2_n \right\};$$

e essendo, a causa del valore di $u(z)$ e della (91):

$$u'(z) = z\,P''_\nu + (1-h)\,P'_\nu = -(2\,\nu+h)\,P'_\nu - z\,P_\nu,$$

$$u''(z) = -(2\,\nu+h)\,P''_\nu - z\,P'_\nu - P_\nu = \frac{(2\,\nu+1)(2\,\nu+h)}{z} P'_\nu -$$

$$- z\,P'_\nu + (2\,\nu+h-1)\,P_\nu,$$

e quindi:

$$u'(\lambda_n) = -\frac{P_\nu(\lambda_n)}{\lambda_n} \left\{ h(2\,\nu+h)+\lambda_n^2 \right\},$$

$$u''(\lambda_n) = \frac{P_\nu(\lambda_n)}{\lambda_n^2} \left\{ h(2\nu+1)\,(2\nu+h) + (2\nu-1)\,\lambda^2_n \right\},$$

sarà:

$$\frac{u'^2(\lambda_n)}{\int_0^1 x^{2\nu+1} P_\nu(\lambda_n x)\, d\, x} = 2\left\{ h(2\,\nu+h) + \lambda^2_n \right\},$$

$$\frac{\psi'(\lambda_n)}{\psi\,(\lambda_n)} = \frac{u''(\lambda_n)}{u'\,(\lambda_n)} = -\frac{1}{\lambda_n}\,\frac{h(2\,\nu+1)(2\,\nu+h) + (2\,\nu-1)\lambda^2_n}{h(2\,\nu+h) + \lambda^2_n} =$$

$$= -\frac{2\nu+1}{\lambda_n} + \frac{2\lambda_n}{h(2\,\nu+h) + \lambda^2_n},$$

talchè per soddisfare alle condizioni relative a $\psi(z)$ basta in questo caso fare in modo che sia:

$$\frac{\psi'(z)}{\psi(z)} = -\frac{2\,\nu+1}{z} + \frac{2\,z}{h(2\,\nu+h) + z^2},$$

cioè prendere:

$$\psi(z) = \frac{h(2\nu+h) + z^2}{z^{2\nu+1}},$$

e allora venendo ad essere:

$$\varphi'(\lambda_n) = 2\,\lambda_n^{2\nu+1} P_\nu(\alpha\,\lambda_n) \int_0^t (\alpha+t)^{2\nu+1} P_\nu\{\lambda_n(\alpha+t)\}\,d\,t\,,$$

basterà anche in questo caso che sia come nel caso precedente:

$$\varphi'(z) = 2\,z^{2\nu+1} P_\nu(\alpha z) \int_0^t (\alpha+t)^{2\nu+1} P_\nu\{(\alpha+t)z\}\,d\,t\,,$$

con

$$\psi(z) = \frac{h(2\nu+h) + z^2}{z^{2\nu+1}}.$$

107. Segue da ciò che con $u(z) = P_\nu(z)$ si avrà:

$$(102)\quad \psi(z) = \frac{1}{z^{2\nu+1}}\,,\quad q_n = \frac{2}{P'^2_\nu(\lambda_n)} \int_0^1 f(x) x^{2\nu+1} P_\nu(\lambda_n\,x)\,d\,x\,,$$

e con $u(z) = z\,P'_\nu(z) - h\,P_\nu(z)$ si avrà invece:

$$(103)\ \psi(z) = \frac{h(2\nu+h)+z^2}{z^{2\nu+1}},\ q_n = \frac{2\lambda_n^2}{\{h(2\nu+h)+\lambda_n^2\}\,P_\nu^2(\lambda_n)} \int_0^1 f(x) x^{2\nu+1} P_\nu(\lambda_n x)\,d\,x$$

e inoltre, ponendo $\beta = \alpha + t$, avremo in tutti i casi:

$$\varphi'(z) = 2\,z^{2\nu+1} P_\nu(\alpha z) \int_0^t \beta^{2\nu+1} P_\nu(\beta\,z)\,d\,t\,;$$

e siccome dall' essere:

$$\frac{\partial \left\{ z^{2\nu+1} P'_\nu(\alpha z) \right\}}{\partial z} + z^{2\nu+1}\,\alpha^2\,P_\nu(\alpha\,z) = 0\,,$$

$$\frac{\partial \left\{ z^{2\nu+1} P'_\nu(\beta z) \right\}}{\partial z} + z^{2\nu+1}\,\beta^2\,P_\nu(\beta z) = 0\,,$$

ove per semplicità indichiamo con $P'_\nu(\alpha\,z)$ e $P'_\nu(\beta\,z)$ le derivate di $P_\nu(\alpha\,z)$ e $P_\nu(\beta\,z)$ rispetto a z, si deduce:

$$(\beta^2 - \alpha^2)\,z^{2\nu+1} P_\nu(\alpha z) P_\nu(\beta z) = \frac{\partial}{\partial z}\left[z^{2\nu+1} \left\{ P'_\nu(\alpha z) P_\nu(\beta z) - P'_\nu(\beta\,z) P_\nu(\alpha\,z) \right\} \right],$$

e quindi anche:

$$\int_0^z z^{2\nu+1} P_\nu(\alpha z) P_\nu(\beta z)\, dz = \frac{z^{2\nu+1} \{ P'_\nu(\alpha z) P_\nu(\beta z) - P'_\nu(\beta z) P_\nu(\alpha z) \}}{\beta^2 - \alpha^2},$$

si vede chiaramente che potremo prendere in ogni caso:

$$\varphi(z) = 2\, z^{2\nu+1} \int_0^t \frac{\beta^{2\nu+1}}{\beta^2-\alpha^2} \{ P'_\nu(\alpha z) P_\nu(\beta z) - P'_\nu(\beta z) P_\nu(\alpha z) \}\, dt,$$

e potremo valerci di questa espressione di $\varphi(z)$, e delle altre $\psi(z) = \frac{1}{z^{2\nu+1}}$ con $u(z) = P_\nu(z)$, o $\psi(z) = \frac{h(2\nu+h)+z^2}{z^{2\nu+1}}$ con $u(z) = z P'_\nu(z) - h P_\nu(z)$, per gli studî che ora abbiamo da fare sull'integrale $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} \frac{\varphi(z)\psi(z)}{u^2(z)} dz - \sum_1^{m_n} \gamma_r$; talchè, osservando che in questo caso quando la linea C_n sia presa in modo da escludere il punto $z=0$ le γ_r sono tutte zero, la questione nel caso di $u(z) = P_\nu(z)$ si riduce all'esame dell'integrale:

$$(104) \quad \frac{1}{\pi i} \int_0^t \frac{\beta^{2\nu+1}}{\beta^2-\alpha^2} dt \int_{C_n} \frac{P'_\nu(\alpha z) P_\nu(\beta z) - P'_\nu(\beta z) P_\nu(\alpha z)}{P_\nu^2(z)} dz,$$

e nel caso di $u(z) = z P'_\nu(z) - h P_\nu(z)$ si riduce all'esame dell'altro:

$$(105) \quad \frac{1}{\pi i} \int_0^t \frac{\beta^{2\nu+1}}{\beta^2-\alpha^2} dt \int_{C_n} \frac{h(2\nu+h)+z^2}{\{ z P'_\nu(z) - h P_\nu(z) \}^2} \{ P'_\nu(\alpha z) P_\nu(\beta z) - P'_\nu(\beta z) P_\nu(\alpha z) \} dz$$

e si può notare che a causa della prima della formola (29) questi integrali rappresentano respettivamente anche le somme

$$(106) \begin{cases} \sum_1^n \frac{2}{P'^2_\nu(\lambda_n)} P_\nu(\alpha \lambda_n) \int_0^t \beta^{2\nu+1} P_\nu(\beta \lambda_n)\, dt, \\ \sum_2^n \frac{2 \lambda_n^2}{\{ h(2\nu+h) + \lambda_n^2 \} P^2_\nu(\lambda_n)} P_\nu(\alpha \lambda_n) \int_0^t \beta^{2\nu+1} P_\nu(\beta \lambda_n)\, dt, \end{cases}$$

nelle quali $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n, ..$ rappresentano le radici delle respettive equazioni $P_\nu(z)=0$, $zP'_\nu(z)-hP_\nu(z)=0$, e n è il numero di queste radici che cadono entro la linea C_n; talchè le proprietà che troveremo per gli stessi integrali o pei loro limiti corrisponderanno anche ad altrettante proprietà di queste somme, o delle serie corrispondenti.

108. Ciò premesso, passiamo dunque a cercare se gli integrali (104) e (105) soddisfano alle condizioni che si avevano per la differenza (42) nel teorema del §. 69.

Prendiamo perciò il solito contorno rettangolare a destra dell'asse delle y coi vertici nei punti $z=ih'$, $z=k+ih'$, $z=k-ih'$, $z=-ih'$, essendo h' un numero positivo comunque grande, e k un altro numero positivo che non è radice della equazione $P_\nu(z)=0$ quando si tratta dell'integrale (104), e non è radice dell'altra $z\,P'_\nu(z) - h\,P_\nu(z)=0$ quando si tratta dell'integrale (105); e dal campo rettangolare così formato escludiamo il punto $z=0$ con un semicerchio di raggio ε piccolo quanto si vuole, e prendiamo per C_n il contorno in parte circolare e in parte rettangolare del campo che così ne risulta.

Osservando che, come apparisce dalla formola (92), $P_\nu(z)$ è una funzione pari di z, si vedrà subito intanto che le due porzioni degli integrali (104) e (105) che sono estese ai due tratti di asse delle y che fanno parte di C_n si distruggono fra loro identicamente.

Similmente, osservando che nel caso dell'integrale (104), e così in quello dell'integrale (105) quando h non è uguale a zero, le funzioni che compariscono sotto gli integrali non divengono infinite per $z=0$, si vede subito che la porzione degli integrali medesimi che è estesa al cerchio di raggio ε dipendentemente dalla piccolezza di ε ha un modulo piccolo quanto si vuole qualunque sia t, e quindi essa è uguale a zero. Invece per $h=0$ la funzione sotto l'integrale (105) diviene infinita di prim' ordine nel punto $z=0$, e poichè, se θ è l'angolo polare, sul cerchio ε si ha $z=\varepsilon e^{i\theta}$, $dz=z\,id\theta$, e θ và da $\frac{\pi}{2}$ a $-\frac{\pi}{2}$, si vede subito che in questo caso l'integrale esteso

alla detta porzione di cerchio è $-(2\nu+2)\int_0^t \beta^{2\nu+1}dt$, o $\alpha^{2\nu+2}-\beta^{2\nu+2}$,

e si annulla soltanto per $t=0$, talchè allora l'integrale (105) presenta una differenza dagli altri casi, della qual differenza dovremo tener conto a suo tempo valendosi delle considerazioni del §. 70.

Per le porzioni rimanenti degli integrali (104) e (105), supponendo α compreso fra 0 e 1 (0 e 1 escl.) e $\beta=\alpha+t$ con t compreso fra $-\alpha+\varepsilon'$ e $1-\alpha$ (ε' diverso da zero e positivo, ma piccolo a piacere), potremo applicare le (98) e (99) prendendo cioè:

$$P_\nu(\alpha z)=\frac{c_\nu}{(\alpha z)^{\nu-\frac{1}{2}}}\left[\{1+\gamma_\nu(\alpha z)\}\cos\left(\alpha z-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)+\gamma'_\nu(\alpha z)\,\text{sen}\left(\alpha z-\frac{2\nu+1}{4}\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$P'_\nu(\alpha z)=-\frac{c_\nu}{z(\alpha z)^{\nu-\frac{1}{2}}}\left[\{1+\delta_\nu(\alpha z)\}\,\text{sen}\left(\alpha z-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)+\delta'_\nu(\alpha z)\cos\left(\alpha z-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)\right]$$

e similmente per $P_\nu(\beta z)$, e $P'_\nu(\beta z)$; donde moltiplicando ec., si troverà:

$$\frac{\beta^{2\nu+1}}{\beta^2-\alpha^2}\{P'_\nu(\alpha z)\,P_\nu(\beta z)-P'_\nu(\beta z)P_\nu(\alpha z)\}=-\frac{c_\nu^2}{z^{2\nu+1}(\beta^2-\alpha^2)}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu+\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\Big[\alpha\{[1+\gamma_\nu(\beta z)][1+\delta_\nu(\alpha z)]-\delta'_\nu(\alpha z)\gamma'_\nu(\beta z)\}\,\text{sen}(\alpha z-\tfrac{2\nu+1}{4}\pi)\cos(\beta z-\tfrac{2\nu+1}{4}\pi)-$$

$$-\beta\{[1+\gamma_\nu(\alpha z)][1+\delta_\nu(\beta z)]-\delta'_\nu(\beta z)\gamma'_\nu(\alpha z)\}\,\text{sen}(\beta z-\tfrac{2\nu+1}{4}\pi)\cos(\alpha z-\tfrac{2\nu+1}{4}\pi)+$$

$$+\{\alpha[1+\delta_\nu(\alpha z)]\gamma'_\nu(\beta z)-\beta[1+\delta_\nu(\beta z)]\gamma'_\nu(\alpha z)\}\,\text{sen}(\alpha z-\tfrac{2\nu+1}{4}\pi)\,\text{sen}(\beta z-\tfrac{2\nu+1}{4}\pi)$$

$$+\{\alpha[1+\gamma_\nu(\beta z)]\delta'_\nu(\alpha z)-\beta[1+\gamma_\nu(\alpha z)]\delta'_\nu(\beta z)\}\cos(\alpha z-\tfrac{2\nu+1}{4}\pi)\cos(\beta z-\tfrac{2\nu+1}{4}\pi)$$

Si aggiunga ora e si tolga fra le grandi parentesi quadre un termine che differisca dal primo soltanto per esservi cangiato il seno in un coseno e il coseno in un seno delle stesse quantità; e dopo si osservi anche che le formole (98) e (99) ci danno:

$$P_\nu(z)=\frac{c_\nu}{z^{\nu+\frac{1}{2}}}\{1+\gamma_\nu(z)\}\left[\cos\left(z-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)+\gamma''_\nu(z)\operatorname{sen}\left(z-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)\right],$$

$$zP'_\nu(z)-hP_\nu(z)=-\frac{c_\nu}{z^{\nu-\frac{1}{2}}}\left\{1+\delta_\nu(z)+\frac{h}{z}\gamma'_\nu(z)\right\}\left[\operatorname{sen}\left(z-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)+\right.$$

$$\left.+\delta''_\nu(z)\cos\left(z-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)\right],$$

ove $\gamma''(z)$ e $\delta''_\nu(z)$ hanno le stesse particolarità di $\gamma'_\nu(z)$ e $\delta'_\nu(z)$ respettivamente, giacchè si ha:

$$\gamma''_\nu(z)=\frac{\gamma'_\nu(z)}{1+\gamma_\nu(z)}\quad,\quad \delta''_\nu(z)=\frac{\delta'_\nu(z)+\frac{h}{z}[1+\gamma_\nu(z)]}{1+\delta_\nu(z)+\frac{h}{z}\gamma'_\nu(z)},$$

e poi si sostituisca tutto negli integrali (104) e (105) facendo al tempo stesso altre piccole trasformazioni con porre per es. invece dei prodotti di seni e coseni le somme e differenze corrispondenti date dalla trigonometria, ec.

Si troverà allora che le porzioni degli integrali (104) e (105) estese alla parte C'_n che resta dell'intiero contorno C_n dopo di aver tolto il semicerchio di raggio ε e i due tratti di asse delle y si riducono alla forma seguente:

$$(107)\quad \frac{1}{2\pi i}\int_0^t\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu+\frac{1}{2}}dt\int_{C'_n}\frac{1+\varepsilon_\nu}{D^2}\frac{\operatorname{sen}tz}{t}dz+\frac{1}{2\pi i}\int_0^t\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu+\frac{1}{2}}\frac{dt}{\alpha+\beta}\int_{C'_n}\frac{\lambda_\nu}{tD^2}dz,$$

ove ε_ν al crescere indefinito di $\operatorname{mod} z$ e per α e β diversi da zero tende a zero come $\frac{1}{z^2}$, e può porsi sotto la forma $\frac{b}{z^2}$ essendo b una quantità che per tutti i valori di α e β fra ε' e 1 (ε' diverso da zero e positivo ma arbitrariamente piccolo) e pei valori di z il cui modulo è superiore a un certo numero k_0 (indipendente da questi valori di α e β fra ε' e 1) ha un modulo sempre inferiore a un numero finito; il denominatore D

è dato dall'una o dall'altra delle formole:

$$D = \cos\left(z - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right) + \gamma''_\nu(z)\,\mathrm{sen}\left(z - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right),$$

$$D = \mathrm{sen}\left(z - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right) + \delta''_\nu(z)\cos\left(z - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right),$$

secondochè si vuole studiare l'integrale (104) o il (105), e il λ_ν è della forma:

$$\lambda_\nu = (t+q_0)\,\mathrm{sen}\left[(\alpha+\beta)z - \frac{2\nu+1}{2}\pi\right] + q_1\cos tz + q_2\cos\left[(\alpha+\beta)z - \frac{2\nu+1}{2}\pi\right],$$

ove le q_0, q_1, q_2 sono funzioni di α, β e z che rispetto ad α e a β hanno la forma $\varphi(\alpha)\psi(\beta) - \varphi(\beta)\psi(\alpha)$; e, dietro quanto abbiamo detto nei paragrafi precedenti intorno alle derivate di $\gamma_\nu, \gamma'_\nu, \delta_\nu$ e δ'_ν, le stesse funzioni q_0, q_1 e q_2 ammettono le derivate rispetto ad α e a β, e queste derivate al crescere indefinito di mod z e quando α e β non sono zero tendono a zero come $\frac{1}{z^2}$ per q_0, e come $\frac{1}{z}$ per q_1 e q_2, e vi tendono anche con uguale rapidità per tutti i valori di α e β fra ε' e 1; di modo chè i rapporti $\frac{q_0}{t}, \frac{q_1}{t}, \frac{q_2}{t}$ possono porsi sotto le forme respettive $\frac{b_0}{z}, \frac{a_1}{z^2} + \frac{b_1}{z^2}, \frac{a_2}{z} + \frac{b_2}{z^2}$, ove le a_1 e a_2 dipendono soltanto da α e β, mentre le b_0, b_1, b_2 possono dipendere anche da z. E si aggiunge che tutte queste quantità a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 quando α e β sono diversi da zero restano finite anche al crescere indefinito di mod z; e, come accade anche per b finchè α e β sono fra ε' e 1 (ε' e 1 incl.), basterà che mod z sia superiore a un certo numero k_0 (indipend. da α e da β) per far sì che i moduli di queste quantità a e b siano sempre inferiori a uno stesso numero finito per tutti gli indicati valori di α e di β.

Ciò premesso, si osservi che lungo i due lati paralleli

all'asse delle x che formano parte di C'_n si ha $z=x\pm ih'$, $dz=dx$; mentre lungo il lato parallelo all'asse delle y si ha $z=k+iy$, $dz=i\,dy$, e negli integrali estesi a C'_n la variabile d'integrazione pei due primi lati verrà ad essere x, e sul lato inferiore andrà da 0 a k e su quello superiore andrà da k a 0, mentre sull'altro lato per variabile d'integrazione potrà prendersi y facendola andare da $-h'$ ad h'. Si vedrà subito da ciò che, quando α e β siano compresi fra 0 e 1 (0 escl.) e $\alpha+\beta$ sia inferiore a 2, nell' ultimo termine della espressione (107) le parti dell' integrale $\int_{C'_n}$ estese ai lati paralleli all'asse delle x verranno coi moduli tanto più piccoli quanto più è grande il numero h' (che può essere preso a piacere), e contemporaneamente in quello esteso al lato parallelo all' asse delle y i limiti $\pm h'$ dell'integrale verranno ognor più grandi.

Considerando poi quelle parti dell' integrale del primo termine che sono estese ai lati paralleli all'asse delle x, osserveremo che per $z=x\pm i\,h'$ si ha:

$$\frac{\operatorname{sen} t\,z}{t}=\frac{\operatorname{sen} t\,x}{t}\cosh t\,h'\pm i\cos t\,x\,\frac{\operatorname{senh} t\,h'}{t}=$$
$$=x\cos t_1\,x\cosh t\,h'\pm i\,h'\cos t\,x\cosh t_2\,h,$$

ove t_1 e t_2 sono compresi fra 0 e t; e quindi, siccome t non è numericamente superiore a 1, anche quelle parti dell'integrale del primo termine della (107) che sono estese ai lati paralleli all' asse delle x al crescere indefinito di h' vengono piccole a piacere, mentre nell' altra porzione dell'integrale del primo termine della (107) (quella porzione cioè che è estesa al lato parallelo all' asse delle y) i limiti $\pm h'$ dell'integrale relativo ad y divengono ognor più grandi; dunque evidentemente, siccome queste ultime porzioni d' integrale conservano un significato per ambedue i termini della (107) anche quando vi si fà $h'=\infty$, noi potremo tralasciare senz' altro tutti gli integrali estesi ai lati paralleli all' asse delle x, riducendo cioè la medesima espressione (107) alla seguente:

$$(108)\ \frac{1}{2\pi}\int_0^t \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu+\frac{1}{2}} dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+\varepsilon_\nu}{D^2}\frac{\operatorname{sen} tz}{t}\, dy + \frac{1}{2\pi}\int_0^t \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu+\frac{1}{2}} \frac{dt}{\alpha+\beta}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_\nu}{tD^2} dy,$$

nella quale $z=k+iy$, essendo k un numero positivo che crescerà poi indefinitamente senza esser mai radice della equazione $D=0$, e pel quale potremo prendere in conseguenza $k=\left(\frac{2\nu+1}{2}+2n\right)\frac{\pi}{2}$, o $k=\left(\frac{2\nu+1}{2}+2n+1\right)\frac{\pi}{2}$ secondochè siamo partiti dall'integrale (104) o dall'integrale (105), essendo n un numero intero abbastanza grande; e in questa ε_ν e $\frac{\lambda_\nu}{t}$ possono prendersi sotto la forma:

$$\varepsilon_\nu = \frac{b}{z^2}\ ,\ \frac{\lambda_\nu}{t} = \left(1+\frac{b_0}{z^2}\right) \operatorname{sen}\left[(\alpha+\beta)z - \frac{2\nu+1}{2}\pi\right] +$$

$$+ \left(\frac{a_1}{z}+\frac{b_1}{z^2}\right)\cos tz + \left(\frac{a_2}{z}+\frac{b_2}{z^2}\right)\cos\left[(\alpha+\beta)z - \frac{2\nu+1}{2}\pi\right],$$

ove le a_1, a_2, b, b_0, b_1 e b_2 hanno le proprietà dette sopra; ed è da ricordare che questi risultati valgono per tutti i valori di α e di t pei quali β (come α) viene diverso da zero e compreso fra 0 e 1, e $\alpha+\beta$ viene inferiore a 2; e in particolare essi valgono anche pel caso di $\alpha=1$, purchè allora t sia sempre negativo, e compreso fra 0 e -1 (0 e -1 escl.).

Ora, per $z=k+iy$, con $k=\left(\frac{2\nu+1}{2}+2n\right)\frac{\pi}{2}$ o $k=\left(\frac{2\nu+1}{2}+2n+1\right)\frac{\pi}{2}$, si avrà $D=\cosh y(1+i\gamma''_\nu \operatorname{tgh} y)$, o $D=\cosh y(1-i\delta''_\nu \operatorname{tgh} y)$, e quindi sarà sempre $\frac{1}{D^2}=\frac{1}{\cosh^2 y}\left(1+\frac{a'\operatorname{tgh} y}{z}+\frac{b'}{z^2}\right)$, ove b' può dipendere anche da z ma ha un modulo sempre inferiore a un numero finito quando mod z o k sono maggiori di un certo numero k_0, mentre

a' è una quantità costante e sempre finita (*); dunque la espressione (108) potrà ridursi anche alla forma seguente:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^t\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu+\frac{1}{2}}\frac{dt}{t}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+\frac{a'}{z}\operatorname{tgh}y+\frac{b''}{z^2}\right)\frac{\operatorname{sen}t\,z}{t\cosh^2 y}d\,y+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^t\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu+\frac{1}{2}}\frac{dt}{\alpha+\beta}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{(1+\frac{a'}{z}\operatorname{tgh}y+\frac{b'_0}{z^2})\operatorname{sen}[(\alpha+\beta)z-\frac{2\nu+1}{2}\pi]+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{a_1}{z}+\frac{b_1'}{z^2}\right)\cos t\,z+\left(\frac{a_2}{z}+\frac{b'_2}{z^2}\right)\cos\left[(\alpha+\beta)z-\frac{2\nu+1}{2}\pi\right]\right\}\frac{d\,y}{\cosh^2 y},$$

ove le nuove quantità b'', b'_0, b'_1 e b'_2 per α e β diversi da zero hanno le proprietà di restare coi moduli finiti anche quando mod z cresce indefinitamente, per modo anche che i loro moduli sono contemporaneamente inferiori a uno stesso numero finito per tutti i valori di α e di β fra ε' e 1 (ε' e 1 incl.) quando k è superiore a un certo numero finito k_0 (che è indipendente da questi valori di α e β).

Ora, se nel secondo degli integrali relativi ad y si considerano i termini che hanno per denominatore z^2, e si osserva che i loro moduli sono superiori a $\frac{p}{k^2+y^2}$, ove p è sempre finito quando α e β non sono zero, si vede chiaramente che gli integrali degli stessi termini sono inferiori a $p\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\,y}{k^2+y^2}$ ovvero a $\frac{p\,\pi}{k}$, e quindi essi e i loro integrali rispetto a t tendono a zero al crescere indefinito di k, e vi tendono anche con uguale ra-

(*) È da notare che, tenendo mente ai significati di $\gamma'_\nu(z)$ e $\delta'_\nu(z)$ e alle formole del §. 103, si riscontra subito che pel primo valore di D si ha $a'=-i\left(\nu^2-\frac{1}{4}\right)$ e pel secondo si ha $a'=-i\,(\nu^2-\frac{1}{4}-2\,h)$.

pidità per tutti i valori di α e β fra ε_1 e 1 (ε_1 e 1 incl.). Lo stesso accade degli altri integrali $\int_0^t \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu+\frac{1}{2}} dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b''}{z^2} \frac{\operatorname{sen} t z}{t \cosh^2 y} d y$, $\int_0^t \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu+\frac{1}{2}} \frac{d t}{\alpha+\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_1}{z} \frac{\cos t z}{\cosh^2 y} d y$, giacchè si ha:

$$\frac{\operatorname{sen} t z}{t} = \frac{\operatorname{sen} t k}{t} \cosh t y + i \cos t k \frac{\operatorname{senh} t y}{t} = k \cos t_1 k \cosh t y + i y \cos t k \cosh t_2 y,$$

$$\cos t z = \cos t k \cosh t y - i \operatorname{sen} t k \operatorname{senh} t y,$$

ove t_1 e t_2 sono compresi fra 0 e t e t non supera l'unità in valore assoluto, e si sà d'altra parte che se θ non arriva a 2 in valore assoluto gli integrali $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh \theta y}{\cosh^2 y} dy$, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{senh} \theta y}{\cosh^2 y} dy$ sono sempre finiti, e tali si mantengono anche se la funzione sotto il segnò viene moltiplicata per una potenza qualunque positiva di y; dunque indicando con Λ una quantità che per α e β diversi da zero tende a zero al crescere indefinito di k e vi tende anche con uguale rapidità per tutti i valori di α e β fra ε' e 1 (ε' e 1 incl.), l'espressione precedente si ridurrà all'altra più semplice:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^t \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu+\frac{1}{2}} dt \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{a'}{z} \operatorname{tgh} y\right) \frac{\operatorname{sen} t z}{t \cosh^2 y} d y +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_0^t \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu+\frac{1}{2}} \frac{d t}{\alpha+\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{a'}{z} \operatorname{tgh} y\right) \frac{\operatorname{sen}\left[(\alpha+\beta) z - \frac{2\nu+1}{2} \pi\right]}{\cosh^2 y} dy +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_0^t \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu+\frac{1}{2}} a_2 \frac{d t}{\alpha+\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\left[(\alpha+\beta) z - \frac{2\nu+1}{2} \pi\right]}{z \cosh^2 y} d y + \Lambda.$$

Posto ora per z il solito valore $k + i y$, e fatto per comodo $\alpha + \beta = 2 - \tau$, basta sviluppare i seni e coseni che quì compariscono e trascurare quelli integrali che sono identica-

mente nulli (perchè relativi a funzioni dispari di y) per giungere subito a trasformare questa espressione nell' altra:

$$
\begin{aligned}
(109)\ & \frac{1}{2\pi}\int_0^t \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu+\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh ty}{\cosh^2 y}\, dy - \frac{a'i}{2\pi}\int_0^t \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu+\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{sen} tk}{t}\, dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y \operatorname{tgh} y \cosh ty}{(k^2+y^2)\cosh^2 y}\, dy + \\
& + \frac{a'i}{2\pi}\int_0^t \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu+\frac{1}{2}} \cos tk\, dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k \operatorname{tgh} y \operatorname{senh} ty}{(k^2+y^2)t\cosh^2 y}\, dy \pm \frac{1}{2\pi}\int_{2(1-\alpha)}^{\tau} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu+\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{sen} \tau k}{\alpha+\beta}\, d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh(\alpha+\beta)y}{\cosh^2 y}\, dy \mp \\
& \mp \frac{a'i}{2\pi}\int_{2(1-\alpha)}^{\tau} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu+\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{sen} \tau k}{\alpha+\beta}\, d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{k^2+y^2} \frac{\operatorname{tgh} y \cosh(\alpha+\beta)y}{\cosh^2 y}\, dy \mp \\
& \mp \frac{a'i}{2\pi}\int_{2(1-\alpha)}^{\tau} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu+\frac{1}{2}} \frac{\cos \tau k}{\alpha+\beta}\, d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{k^2+y^2} \frac{\operatorname{tgh} y \operatorname{senh}(\alpha+\beta)y}{\cosh^2 y}\, dy \mp \\
& \mp \frac{1}{2\pi}\int_{2(1-\alpha)}^{\tau} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu+\frac{1}{2}} \frac{\cos \tau k}{\alpha+\beta}\, d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k\cosh(\alpha+\beta)y}{(k^2+y^2)\cosh^2 y}\, dy \mp \frac{1}{2\pi}\int_{2(1+\alpha)}^{\tau} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu+\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{sen} \tau k}{\alpha+\beta}\, d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y \operatorname{senh}(\alpha+\beta)y}{(k^2+y^2)\cosh^2 y}\, dy + A
\end{aligned}
$$

ove devono prendersi i segni superiori o gli inferiori secondochè si studia l'integrale (104) o il (105), e τ non è mai negativo.

Ora, prendendo a esaminare separatamente i varii termini di questa espressione, incominceremo dall'osservare che il primo di essi può scriversi $\frac{1}{2\pi}\int_0^t \frac{\operatorname{sen} t k}{\operatorname{sen} t}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu+\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh t y}{\cosh^2 y}\, dy$, riducendosi così alla forma di quelli che si presentano nello studio degli sviluppi di Fourier; e siccome la funzione $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu+\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh t y}{\cosh^2 y}\, dy$ ha una derivata sempre finita

rispetto a t, finchè t non arriva a 2 in valore assoluto e β e α sono discosti da zero, e il suo limite per $t=0$ è l'integrale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\cosh^2 y}$ che è uguale a 2, si vede subito che il termine stesso è sempre inferiore a un certo numero finito, e per t positivo ha per limite $\frac{1}{2}$ e per t negativo ha per limite $-\frac{1}{2}$, e tende anche con ugual rapidità verso questi limiti finchè t è discosto da zero più di ε, e α e β sono discosti da zero più di ε'.

Osservando poi che il secondo e terzo termine possono ridursi ai seguenti $\frac{a'i}{2\pi k}\int_0^t \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu+\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{sen} t}{tk} dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k^2}{k^2+y^2} \frac{y \operatorname{tgh} y \cosh t y}{\cosh^2 y} dy$, $\frac{a'i}{2\pi k}\int_0^t \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu+\frac{1}{2}} \cos t k \, dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k^2}{k^2+y^2} \frac{y \operatorname{tgh} y \cosh t_1 y}{\cosh^2 y} dy$, ove t_1 è compreso fra 0 e t, e le funzioni $\frac{y \operatorname{tgh} y \cosh t y}{\cosh^2 y}$, $\frac{y \operatorname{tgh} y \cosh t_1 y}{\cosh^2 y}$, sono atte alla integrazione fra $-\infty$ e ∞, e si ha $\frac{k^2}{k^2+y^2} \leq 1$, $\frac{\operatorname{sen} t k}{tk} < 1$, si vede chiaro che questi termini quando k è superiore a un certo numero k_0 sono numericamente inferiori a quel numero che più ci piace finchè α e β sono fra ε' e 1 (ε' e 1 incl.)

Per gli altri termini poi si osserverà dapprima che se α è differente anche da 1, $\alpha+\beta$ sarà sempre discosto da 2, e le funzioni che compariscono sotto gli integrali relativi ad y e a t saranno atte alle integrazioni anche quando si riducano ai valori assoluti e si sopprimano sotto gli integrali i fattori $\frac{y}{k^2+y^2}$, o $\frac{k}{k^2+y^2}$ portando fuori di questi integrali il fattore ad essi non inferiore $\frac{1}{k}$; dunque con α diverso da 1 tutti questi termini saranno sempre finiti e tenderanno a zero al crescere indefinito di k; e vi tenderanno anche con ugual rapidità se α sarà compreso fra ε' e $1-\varepsilon_1$, e β sarà fra ε' e 1 e discosto da α

più di ε (ε, ε', ε_1 diversi da zero e positivi ma arbitrariamente piccoli); talchè per α compreso fra ε' e 1 (1 ora escl.) è certo che tutta l'espressione (108) al crescere indefinito di k tende verso $\frac{1}{2}$ o verso $-\frac{1}{2}$ secondochè α è positivo o negativo, e vi tende con ugual rapidità per tutti i valori di α fra ε' e $1-\varepsilon_1$ e pei valori di t discosti da zero più di ε e pei quali β o $\alpha+t$ è compreso fra ε' e 1 (ε' e 1 incl.); e al tempo stesso la medesima espressione (108) anche pei valori di t che possono considerarsi fra $-\varepsilon$ e ε e poi valori di α fra ε' e $1-\varepsilon_1$ è sempre numericamente inferiore a un numero finito.

Per studiare ora gli ultimi cinque termini della espressione precedente (109) anche quando α si accosta indefinitamente ad uno o prende il valore uno, osserviamo prima che se θ è un numero fisso inferiore a 2, e $\varphi(y)$ è una funzione di y che è sempre finita insieme alla sua derivata anche al crescere indefinito di y, o tutt'al più per $y=\infty$ diviene infinita dell'ordine di una potenza di y, facendo una doppia integrazione per parti si trova:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)\frac{\cosh\theta y}{\cosh^2 y}dy=-\frac{1}{\theta}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi'(y)\frac{\operatorname{senh}\theta y}{\cosh^2 y}dy+\frac{2}{\theta}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)\frac{\operatorname{senh}\theta y\operatorname{senh}y}{\cosh^3 y}dy=$$

$$=-\frac{1}{\theta}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi'(y)\frac{\operatorname{senh}\theta y}{\cosh^2 y}dy-\frac{2}{\theta^2}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi'(y)\frac{\cosh\theta y\operatorname{senh}y}{\cosh^3 y}dy+$$

$$+\frac{4}{\theta^2}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)\frac{\cosh\theta y}{\cosh^2 y}dy-\frac{6}{\theta^2}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)\frac{\cosh\theta y}{\cosh^4 y}dy,$$

donde si ricava:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)\frac{\cosh\theta y}{\cosh^2 y}dy=\frac{\theta}{(4-\theta^2)}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi'(y)\frac{\operatorname{senh}\theta y}{\cosh^2 y}dy+$$

$$+\frac{2\theta^2}{(4-\theta^2)}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi'(y)\frac{\cosh\theta y\operatorname{senh}y}{\cosh^3 y}dy+\frac{6}{(4-\theta^2)}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)\frac{\cosh\theta y}{\cosh^4 y}dy,$$

e una formola analoga si ha per gli integrali $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)\frac{\operatorname{senh}\theta y}{\cosh^2 y}dy$;

e quindi facendo $\theta=\alpha+\beta$, e prendendo dapprima $\varphi(y)=1$, si vedrà intanto che anche il quarto termine della espressione (109) prende la forma di quelli che si presentano nello studio degli sviluppi di Fourier, e quindi, se α è diverso da uno, per k superiore a un certo numero k_0 esso è sempre numericamente inferiore a un numero finito, e per $k=\infty$ ha per limite zero, mentre se $\alpha=1$, osservando che per $\theta=2$ si ha $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cosh\theta y}{\cosh^4 y}dy=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{\cosh^2 y}+$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\text{tgh}^2\, y\,\frac{dy}{\cosh^2 y}=\Big[\text{tgh}y\Big]_{-\infty}^{\infty}+\frac{1}{3}\Big[\text{tgh}^3 y\Big]_{-\infty}^{\infty}=\frac{8}{3},$$

si troverà che esso ha per limite $+\frac{1}{2}$ o $-\frac{1}{2}$ secondochè siamo partiti dall' integrale (104) o dal (105).

Invece per il quinto e ottavo termine della espressione (109), sostituendo alle funzioni di t che vi compariscono i loro valori assoluti, e poi applicando le formole precedenti col farvi $\varphi(y)=\frac{y\,\text{tgh}\,y}{k^2+y^2}$ o $\varphi(y)=\frac{y}{k^2+y^2}$, si vedrà subito intanto che questi termini sono sempre inferiori in valore assoluto a un numero finito, e se l' antica variabile t o la nuova τ sono prossime a zero o a $2(1-\alpha)$ più di ε, i termini stessi sono sempre numericamente inferiori a $p'\varepsilon$ ove p' è un numero positivo e finito indipendente da ε.

Similmente, osservando che per $\alpha+\beta\leq 2$ le funzioni $\frac{\text{tgh}\,y\,\text{senh}(\alpha+\beta)y}{\cosh^2 y}$, $\frac{\cosh(\alpha+\beta)y}{\cosh^2 y}$ sono sempre inferiori a 2, e ponendo per esse 2 nel sesto e settimo termine della espressione (109), si vede chiaro che anche questi termini sono sempre numericamente inferiori a un numero finito, e se t o τ sono vicine a zero o a $2(1-\alpha)$ più di ε essi sono sempre numericamente inferiori a $q'\varepsilon$ ove q' è positivo e inferiore a un numero finito indipendente da ε; dunque, osservando che gli integrali da 0 a t (relativi a t) quando t è superiore a ε in valore assoluto possono spezzarsi in due, uno cioè da 0 a ε e uno da ε a t, e questi ultimi per quanto piccolo sia ε (per essere allora

$\alpha+\beta$ discosto da 2 più di ε) al crescere indefinito di k possono rendersi minori di quel numero che più ci piace, mentre quelli da 0 a ε sono inferiori a $p'\varepsilon$, o a $q'\varepsilon$, si può evidentemente concludere che anche per $\alpha=1$ gli ultimi quattro termini della espressione (109) sono sempre numericamente inferiori a un certo numero finito, e al crescere indefinito di k hanno per limite zero; e quindi, riassumendo, si può ora affermare che quando α, β, e t sono diversi da zero e α è diverso anche da 1, la espressione (109) per $k=\infty$ ha per limite $\frac{1}{2}$ o $-\frac{1}{2}$ secondochè t è positivo o negativo, e per $\alpha=1$ ha per limite zero o -1 secondochè siamo partiti dall'integrale (104) o dal (105); come si può affermare inoltre che se α e β sono compresi fra ε' e 1 (ε' e 1 incl. e ε' diverso da zero e positivo ma arbitrariamente piccolo) la espressione (109) è sempre finita per k superiore a un certo numero k_0 indipendente da α e da t; e quando t è discosto da zero e da $-\alpha$ più di ε e di ε', e α è compresa fra ε' e $1-\varepsilon_1$ (ε e ε_1 diversi da zero e positivi ma arbitrariamente piccoli) essa al crescere indefinito di k converge in ugual grado verso $\pm\frac{1}{2}$ qualunque siano i valori di α e t fra i limiti relativi.

Così restano fatte intanto tutte le verificazioni che sono richieste dal teorema del §. 69 per il valore degli integrali (104) e (105) quando t è fra $-\varepsilon$ e ε, e per il limite di essi quando t è diverso da zero e compreso fra $-\alpha+\varepsilon'$ e $1-\alpha$. Per fare ora anche le verificazioni relative alla derivata rapporto a t degli integrali (104) e (105) quando t è diverso da zero e da $-\alpha$, osserveremo che, coi ragionamenti stessi che abbiamo fatti sopra, si trova subito che questa derivata pel caso dell'integrale (104) si riduce all'espressione seguente:

$$\frac{1}{2\pi}\frac{\beta^{2\nu+1}}{\beta^2-\alpha^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P'_\nu(\alpha z)P_\nu(\beta z)-P'_\nu(\beta z)P_\nu(\alpha z)}{P^2_\nu(z)}\,dy,$$

e pel caso dell'integrale (105), si riduce all'una o all'altra delle due:

$$\frac{1}{2\pi}\frac{\beta^{2\nu+1}}{\beta^2-\alpha^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h(2\nu+h)+z^2}{\{zP'_\nu(z)-hP_\nu(z)\}^2}\{P'_\nu(\alpha z)P_\nu(\beta z)-P'_\nu(\beta z)P_\nu(\alpha z)\}\,dy\,,$$

$$-(2\nu+2)\beta^{2\nu+1}+\frac{1}{2\pi}\frac{\beta^{2\nu+1}}{\beta^2-\alpha^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P'_\nu(\alpha z)\,P_\nu(\beta z)-P'_\nu(\beta z)\,P_\nu(\alpha z)}{P'^2_\nu(z)}\,dy$$

secondochè h è diverso da zero o uguale a zero, e in queste $z=k+i\,y$; e ora, supponendo α diverso da zero e t discosto da zero più di ε e compreso fra $-\alpha+\varepsilon'$ e $1-\alpha$ (in modo che anche β venga diverso da zero), e trasformando queste espressioni col sostituirvi per $P_\nu(\alpha z)$, $P_\nu(\beta z)$, ... i loro valori, come si fece negli studî precedenti intorno agli integrali (104) e (105), si troverà al modo stesso che, astrazion fatta dal termine $-(2\nu+2)\beta^{2\nu+1}$ che comparisce nell'ultima, esse si ridurranno tutte alle derivate rapporto a t delle (108) o (109); e considerate per ogni valore di α fra 0 e 1 (0 escl.) e pei corrispondenti valori di t fra $-\alpha+\varepsilon'$ e $1-\alpha$ discosti da zero più di ε le espressioni medesime quando n sia divenuto superiore a uno stesso numero n_0 (indipendente da t) avranno i loro moduli sempre inferiori a un certo numero finito, e questo numero n_0 potrà anche prendersi sempre lo stesso finchè α resterà compreso fra ε' e $1-\varepsilon_1$; come si riscontrerà inoltre che è soddisfatta anche la condizione che per α compreso fra ε' e 1 (1 ora incl.) e per n superiore a un medesimo numero (indipendente da t e da α) i prodotti delle stesse espressioni per t restano inferiori in valore assoluto a un certo numero finito anche quando t tende a zero per valori positivi o per valori negativi.

Passando poi a considerare i valori di t fra $-\alpha$ e $\alpha+\varepsilon'$, con α diverso da zero, si osserverà che siccome il β prende ora valori prossimi quanto si vuole a zero, e per $t=-\alpha$ si ha $\beta=0$, non si possono più usare tutte le formole di cui ci siamo valsi sopra, nè si possono più trarre tutte le conclusioni precedenti; però, dietro quanto si disse in generale anche al §. 69, considerando il punto $t=-\alpha$ come un punto eccezionale

nell'intorno del quale resta incerto se tutte le condizioni precedenti sono o no soddisfatte, basterà vedere se per questo punto il prodotto della funzione data $f(\alpha+t)$ per la derivata degli integrali (104) o (105) soddisfa alle solite condizioni generali di cui abbiamo tante volte parlato.

Ora, valendosi delle formole del §. 104 si trova subito che per t prossimo quanto si vuole a $-\alpha$ le espressioni precedenti si riducono alla forma $\beta^{2\nu+\frac{1}{2}-p}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)dy$, ove p è il maggiore dei due numeri ν e $\frac{1}{2}$, e $\varphi(y)$ è una funzione di k, α, β e y nella quale il numeratore, oltre a fattori il cui modulo è sempre inferiore a un numero finito, contiene in ogni termine uno dei fattori senh αy, cosh αy, e uno dei due senh βy, cosh βy, mentre il denominatore ha il fattore $\cosh^2 y$. Ne segue che il modulo dell' integrale $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)\,dy$ si mantiene sempre inferiore a un certo numero finito, e ciò avviene per i valori di n o di k superiori a uno stesso numero finchè α è compreso fra ε_1 e 1 (1 incl.) e t è fra $-\alpha$ e $-\alpha+\varepsilon'$; quindi, per quanto si disse negli studî generali, basterà che il prodotto $f(\alpha+t)\beta^{2\nu+\frac{1}{2}-p}$ negli intorni a destra del punto $t=-\alpha$, o l'altro $f(x)x^{2\nu+\frac{1}{2}-p}$ negli intorni a destra del punto $x=0$ resti atto all'integrazione anche ridotto ai suoi valori assoluti; e si può notare che quando questa condizione sia soddisfatta, se $2\nu+\frac{1}{2}-p$ è negativo anche $f(x)$ verrà di suo atta alla integrazione negli indicati intorni a destra di $x=0$, mentre se $2\nu+\frac{1}{2}-p$ è positivo, per la validità dei nostri risultati non importa richiedere che $f(x)$ resti atta all'integrazione nei medesimi intorni.

Così resta provato che quando $f(x)$ nell' intorno a destra del punto $x=0$ soddisfa alla condizione ora indicata, se h è diverso da zero (finito o infinito) si trovano verificate tutte le

condizioni del teorema del §. 69, mentre se $h=0$ il limite dell'integrale (105) per $n=\infty$ e t diverso da zero, in confronto a quello che si ha negli altri casi viene aumentato di $\left(\alpha^{2\nu+2}-\beta\right)^{2\nu+2}$ tanto per t positivo che per t negativo, e quindi, secondo quanto dicemmo al §. 70, bisogna in tal caso aggiungere alla serie $\sum_{1}^{\infty} q_n \, P_\nu(\lambda_n x)$ il termine $(2\nu+2)\int_0^1 f(x)\, x^{2\nu+1}\, dx$; dunque, ricordando anche quanto si disse in generale al §. 53 intorno ai punti estremi, e osservando che per $\alpha=1$ il t non può prendersi che negativo e allora gli integrali (104) e (105) hanno per limite 0 e -1 respettivamente, e il punto $t=-1$ non viene a figurare come il punto $t=0$, si potrà enunciare il seguente teorema generale: „ Se $\nu>-1$, e $P_\nu(z)$ è l'integrale:

$$1-\frac{z^2}{2(2\nu+2)}+\frac{z^4}{2.4(2\nu+2)(2\nu+4)}-\frac{z^6}{2.4.6(2\nu+2)(2\nu+4)(2\nu+6)}+\cdots$$

„ della equazione:

$$z\frac{d^2P}{dz^2}+(2\nu+1)\frac{dP}{dz}+z\,P=0,$$

„ una funzione reale $f(x)$ data arbitrariamente fra 0 e 1, e
„ tale che il prodotto $f(x)\,x^{2\nu+\frac{1}{2}-p}$, ove p è il maggiore dei
„ due numeri ν e $\frac{1}{2}$, resti atto alla integrazione in questo
„ intervallo anche riducendolo ai suoi valori assoluti, può
„ rappresentarsi analiticamente secondo le tre serie:

$$\sum_{1}^{\infty} q_n P_\nu(\lambda_n x),\quad (2\nu+2)\int_0^1 f(x)\, x^{2\nu+1} dx+\sum_{1}^{\infty} q'_n P_\nu(\lambda'_n x),\quad \sum_{1}^{\infty} q''_n P_\nu(\lambda''_n x),$$

„ ove le λ_n, λ'_n, λ''_n sono respettivamente le radici positive
„ delle equazioni $P_\nu(z)=0$, $P'_\nu(z)=0$, $z\,P'_\nu(z)-h\,P_\nu(z)=0$,
„ essendo h una costante reale qualunque finita e diversa da
„ zero, e essendo:

$$q_n = \frac{2}{P^2_\nu(\lambda_n)} \int_0^1 f(x) x^{2\nu+1} P_\nu(\lambda_n x)\, dx ,$$

$$q'_n = \frac{2}{P^2_\nu(\lambda'_n)} \int_0^1 f(x) x^{2\nu+1} P_\nu(\lambda'_n x)\, dx ,$$

$$q''_n = \frac{2\lambda''^2_n}{\{h(2\nu+h)+\lambda''^2_n\} P^2_\nu(\lambda''_n)} \int_0^1 f(x) x^{2\nu+1} P_\nu(\lambda''_n x)\, dx ;$$

„ e questi sviluppi varranno per tutti i punti x fra 0 e 1
„ (0 al più escl.) pei quali $f(x+0)$ e $f(x-0)$ sono deter-
„ minati e finiti ed è soddisfatta una almeno delle condizioni
„ seguenti:

1.ª „ che negli intorni degli stessi punti x la funzione $f(x)$
„ non faccia infinite oscillazioni, o almeno le venga a perdere
„ tutte coll' aggiungervi una conveniente funzione del primo
„ grado;

2.ª „ che negli stessi intorni la funzione $f(x)$ si com-
„ porti in modo che scomponendoli in intervalli comunque
„ piccoli δ_s che non terminano al punto x la somma delle
„ oscillazioni D_s corrispondenti sia di quel grado di picco-
„ lezza che più ci piace;

3.ª „ che negli stessi intorni la funzione medesima $f(x)$
„ ammetta una derivata o un estremo oscillatorio che resta
„ atto alla integrazione anche ridotto ai suoi valori assoluti;

4.ª „ che i rapporti incrementali $\frac{f(x\pm t)-f(x\pm 0)}{\pm t}$ con-
„ siderati come funzioni di t siano sempre finiti o almeno
„ restino atti alla integrazione anche ridotti ai loro valori
„ assoluti; e s' intende sempre che nei punti x pei quali una
„ almeno di queste condizioni è soddisfatta la somma della serie,
„ quando si tratta di punti interni, è $f(x)$ o $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$
„ secondochè in essi $f(x)$ è continua o nò, e quando si tratta
„ del punto estremo $x=1$ è zero per la prima serie, e $f(1-0)$
„ per le altre due „.

E si aggiunge che avendo riguardo al processo di dimostrazione precedente si riconoscerebbe che, come nel caso della serie di Fourier, trattandosi di punti x *interni* all' intervallo $(0\ ,\ 1)$ basta propriamente che queste condizioni 1.ª, 2.ª, 3.ª e 4.ª siano soddisfatte per la funzione di t $F(t)=f(x+t)+f(x-t)$ nell' intorno destro (o sinistro) del punto $t=0$.

109. Introducendo poi invece delle $P_\nu(z)$ le funzioni di Bessel $I_\nu(z)$ mediante la formola $P_\nu(z)=Az^{-\nu}\,I_\nu(z)$ ove A è una costante (*), e cambiando per semplicità $f(x)$ in $f(x)x^{-\nu}$, il teorema ora dimostrato ci conduce anche a dire che: „ Se „ $\nu>-1$, e $f(x)$ è una funzione reale di x che fra 0 e 1 è data „ arbitrariamente ma è tale che il prodotto $f(x)x^{\nu+\frac{1}{2}-p}$, ove p „ è al solito il maggiore dei due numeri ν e $\frac{1}{2}$, resti atto alla „ integrazione anche ridotto ai suoi valori assoluti, questa „ funzione $f(x)$ pei punti x fra 0 e 1 (0 al più escl.) pei quali „ $f(x+0)$ e $f(x-0)$ sono determinati e finiti, ed è soddi- „ sfatta una almeno delle condizioni 1.ª 2.ª 3.ª e 4.ª del teo- „ rema precedente potrà rappresentarsi analiticamente secondo „ le tre serie di funzioni di Bessel:

$$\sum_1^\infty q_n\,I_\nu(\lambda_n x),\quad (2\nu+2)\int_0^1 f(x)x^{\nu+1}\,dx+\sum_1^\infty q'_n\,I_\nu(\lambda'_n x),\quad \sum_1^\infty q''_n I_\nu(\lambda''_n x),$$

„ ove le quantità $\lambda_n, \lambda'_n, \lambda''_n$ sono ora respettivamente le ra- „ dici positive delle equazioni $I_\nu(z)=0$, $\frac{d}{dz}\left(z^{-\nu}\,I_\nu(z)\right)=0$ o „ $z\,I'_\nu(z)-\nu I_\nu(z)=0$, e $z\,I'_\nu(z)-(h+\nu)I_\nu(z)=0$ essendo h una

(*) Poichè le funzioni (conosciute sotto il nome di funzioni di Bessel) $I_\nu(z)$ per ν frazionario o negativo hanno un punto singolare per $z=0$, mentre le altre $P_\nu(z)$ sono monodrome finite e continue in tutto il piano z, e non differiscono dalle $I_\nu(z)$ altro che pel fattore $I_\nu(z)$, mi sembra che sarebbe forse meglio l' introdurre sempre nell'analisi le attuali funzioni $P_\nu(z)$ invece delle $I_\nu(z)$. Anche la equazione differenziale cui soddisfano le $P_\nu(z)$ è da riguardarsi come più semplice di quella che si ha per le $I_\nu(z)$, e molte delle formole che si hanno per le $P_\nu(z)$ sono più semplici di quelle che loro corrispondono per le $I_\nu(z)$.

„ costante reale qualunque finita e diversa da zero, e essendo:

$$q_n = \frac{2}{\mathrm{I}'^2_\nu(\lambda_n)}\int_0^1 xf(x)\mathrm{I}_\nu(\lambda_n x)dx,$$

$$q'_n = \frac{2}{\mathrm{I}^2_\nu(\lambda'_n)}\int_0^1 xf(x)\mathrm{I}_\nu(\lambda'_n x)dx,$$

$$q''_n = \frac{2\,\lambda''^2_n}{\{h(2\nu+h)+\lambda''^2_n\}\mathrm{I}^2_\nu(\lambda''_n)}\int_0^1 xf(x)\mathrm{I}_\nu(\lambda''_n x)dx;$$

„ e la somma di queste serie per gli indicati punti x è al solito
„ $f(x)$ o $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$ quando si tratta dei punti in-
„ terni; e per $x=1$ è zero per la prima serie, e $f(1-0)$ per
„ le altre due „.

110. E si può aggiungere che, siccome per $\nu \geq 0$ gli esponenti $2\nu+\frac{1}{2}-p$ e $\nu+\frac{1}{2}-p$ non sono negativi, perchè allora si ha $p=\nu$ o $p=\frac{1}{2}$, così, nel caso di $\nu \geq 0$, perchè le condizioni relative ai prodotti $f(x)\,x^{2\nu+\frac{1}{2}-p}$, $f(x)\,x^{\nu+\frac{1}{2}-p}$ véngano soddisfatte basterà evidentemente che $f(x)$ sia atta all'integrazione fra 0 e 1 anche ridotta ai suoi valori assoluti. E se sarà $-1<\nu<0$ nel caso del secondo teorema, e $-\frac{1}{2}<\nu<0$ nel caso del primo, allora perchè le indicate condizioni rispetto ai prodotti $f(x)\,x^{\nu+\frac{1}{2}-p}$, $f(x)\,x^{2\nu+\frac{1}{2}-p}$ siano soddisfatte basterà che nell' intorno a destra di $x=0$ la $f(x)$ sia sempre finita; mentre se nel primo teorema sarà $-1<\nu\leq-\frac{1}{2}$, allora perchè la condizione stessa pel prodotto $f(x)\,x^{2\nu+\frac{1}{2}-p}$ sia soddisfatta basterà che col tendere a zero di x la $f(x)$ tenda a zero come una delle funzioni:

$$x^{c-(2\nu+1)}, \quad \frac{1}{x^{2\nu+1}(\log x)^{1+c}}, \quad \frac{1}{x^{2\nu+1}\log x\,(\log^2 x)^{1+c}}\cdots$$

ove c è un numero diverso da zero e positivo. Queste condizioni però sono soltanto sufficienti.

Inoltre aggiungiamo che avendosi $P'_\nu(z) = -\frac{z}{2\nu+2} P_{\nu+1}(z)$, s' intende subito che come si hanno sviluppi di $f(x)$ in serie di funzioni P_ν, così se ne possono avere altri simili in serie di funzioni derivate $P'_\nu, \ldots$

111. Se poi osserviamo in particolare che per $\nu = \pm\frac{1}{2}$ la funzione $P_\nu(z)$ si riduce alle due:

$$P_{-\frac{1}{2}}(z) = \cos z, \qquad P_{\frac{1}{2}}(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z},$$

basterà applicare il teorema del §. 108 per trovare sei sviluppi, tre dei quali si riducono a sviluppi di Fourier della forma:

$$\sum_0^\infty p_n \cos\frac{2n+1}{2}\pi x, \quad \int_0^1 f(x)dx + \sum_1^\infty p'_n \cos n\pi x, \quad \sum_1^\infty q_n \operatorname{sen} n\pi x,$$

e gli altri si riducono alle forme seguenti:

$$\sum_1^\infty p_n \cos\lambda_n x, \quad 3\int_0^1 f(x)\,x^2\,dx + \sum_1^\infty q_n \frac{\operatorname{sen}\mu_n x}{x}, \quad \sum_1^\infty r_n \frac{\operatorname{sen}\nu_n x}{x},$$

con:

$$p_n = \frac{2\lambda_n^2}{\{h(h-1)+\lambda_n^2\}\cos^2\lambda_n}\int_0^1 f(x)\cos\lambda_n x dx = \frac{2(h^2+\lambda_n^2)}{h(h-1)+\lambda_n^2}\int_0^1 f(x)\cos\lambda_n x dx,$$

$$q_n = \frac{2}{\operatorname{sen}^2\mu_n}\int_0^1 f(x)\,x\operatorname{sen}\mu_n x\,dx = \frac{2(1+\mu_n^2)}{\mu_n^2}\int_0^1 f(x)\,x\operatorname{sen}\mu_n x\,dx,$$

$$r_n = \frac{2\nu_n^2}{\{h(h+1)+\nu_n^2\}\operatorname{sen}^2\nu_n}\int_0^1 f(x)\,x\operatorname{sen}\nu_n x dx = \frac{\{2(1+h)^2+\nu_n^2\}}{h(h+1)+\nu_n^2}\int_0^1 f(x)x\operatorname{sen}\nu_n x d.$$

essendo le $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ le radici positive della equazione $z \operatorname{sen} z + h \cos z = 0$; le $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$ le radici positive della equazione $z \cos z - \operatorname{sen} z = 0$; e le $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n, \ldots$ le radici positive dell' altra $z \cos z - (1+h) \operatorname{sen} z = 0$, con h costante reale e finita qualunque ma diversa da zero; e mentre pel primo di questi sviluppi (per essere allora $\nu = -\frac{1}{2}$) si richiede che $\frac{f(x)}{x}$ resti atta all'integrazione fra 0 e 1 anche ridotta ai suoi valori assoluti, per gli altri sviluppi basta che soddisfi a questa condizione il prodotto $x f(x)$, perchè per essi si ha $\nu = \frac{1}{2}$.

Cambiando poi $f(x)$ in $\frac{f(x)}{x}$, i due ultimi sviluppi si riducono ai seguenti :

$$3\, x \int_0^1 f(x) x\, dx + \sum_1^\infty q_n \operatorname{sen} \mu_n x, \qquad \sum_1^\infty r_n \operatorname{sen} \nu_n x,$$

nei quali:

$$q_n = \frac{2}{\operatorname{sen}^2 \mu_n} \int_0^1 f(x) \operatorname{sen} \mu_n x\, dx = \frac{2(1+\mu_n)^2}{\mu^2_n} \int_0^1 f(x) \operatorname{sen} \mu_n x\, dx,$$

$$r_n = \frac{2\nu^2_n}{\{h(h+1)+\nu^2_n\} \operatorname{sen}^2 \nu_n} \int_0^1 f(x) \operatorname{sen} \nu_n x\, dx = \frac{2\{(1+h)^2+\nu^2_n\}}{h(h+1)+\nu^2_n} \int_0^1 f(x) \operatorname{sen} \nu_n x\, dx$$

con h costante reale e finita qualunque diversa da zero e le μ_n, e ν_n radici delle respettive equazioni $z \cos z - \operatorname{sen} z = 0$, $z \cos z - (1+h) \operatorname{sen} z = 0$; e questi sviluppi, considerati pei soliti punti x fra 0 e 1 (0 al più escl.) pei quali sono soddisfatte le condizioni dei teoremi precedenti, rappresentano $f(x)$ o $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$ quando si tratta di punti interni, e $f(1-0)$ quando si tratta del punto estremo $x=1$; e rispetto a $f(x)$ si ha ora la sola condizione che essa resti atta alla integrazione fra 0 e 1 anche riducendola ai suoi valori assoluti.

Gli sviluppi $\sum_1^\infty r_n \cos \nu_n x$ che ora abbiamo trovati sono quelli della fisica matematica ai quali alludevamo nel §. 83, e cambiandovi x e z in πx e πz si riducono precisamente a quelli che si hanno dalla formola (56) nel caso in cui sia $F(z) = \pi z$, $F_1(z) = -(1+h)$.

112. Merita poi di essere notato che, siccome le somme (106) hanno le stesse proprietà degli integrali (104) e (105) cui esse sono uguali, e si ha:

$$\int_0^t \beta^{2\nu+1} P_\nu(\beta\lambda_n)\,dt = -\frac{1}{\lambda_n}\Big[(\alpha+t)^{2\nu} P'_\nu\{(\alpha+t)\lambda_n\} - \alpha^{2\nu} P'_\nu(\alpha\lambda_n)\Big],$$

ove le derivate s' intendano prese rispetto a λ_n, si avranno le formole notevoli:

$$\frac{1}{4} = -\sum_1^\infty \frac{P_\nu(\alpha\lambda_n)}{\lambda_n P'^2_\nu(\lambda_n)}\Big[(\alpha+t)^{2\nu} P'_\nu\{(\alpha+t)\lambda_n\} - \alpha^{2\nu} P'_\nu(\alpha\lambda_n)\Big].$$

$$\frac{1}{4} = \frac{(\alpha+t)^{2\nu+2} - \alpha^{2\nu+2}}{2} - \sum_1^\infty \frac{P_\nu(\alpha\lambda'_n)}{\lambda'_n P^2_\nu(\lambda'_n)}\Big[(\alpha+t)^{2\nu} P'_\nu\{(\alpha+t)\lambda'_n\} - \alpha^{2\nu} P'_\nu(\alpha\lambda'_n)\Big],$$

$$\frac{1}{4} = -\sum_1^\infty \frac{\lambda''_n P_\nu(\alpha\lambda''_n)}{\{h(2\nu+h)+\lambda''^2_n\} P^2_\nu(\lambda''_n)}\Big[(\alpha+t)^{2\nu} P'_\nu\{(\alpha+t)\lambda''_n\} - \alpha^{2\nu} P'_\nu(\alpha\lambda''_n)\Big],$$

nelle quali α è diverso da zero e da 1, t è diverso da zero e positivo e non superiore a $1-\alpha$, le λ_n, λ'_n e λ''_n sono ancora le radici reali e positive delle respettive equazioni $P_\nu(z) = 0$, $P'_\nu(z) = 0$, $zP'_\nu(z) - hP_\nu(z) = 0$, e nella terza h è finito e diverso da zero. Per t diverso da zero e negativo e superiore a $-\alpha$, se α è fra 0 e 1 (0 e 1 esclusi), queste formole continuano ancora a sussistere quando si mutino soltanto i segni dei primi membri; e se α è uguale ad uno la seconda e la terza di queste formole sussistono pure quando nei loro primi membri si

ponga $-\frac{1}{2}$ invece di $\frac{1}{4}$, e allora non vi è più da occuparsi della prima poichè in essa i termini del secondo membro vengono tutti identicamente zero.

Cambiando nei secondi membri $\alpha+t$ in β, si hanno di quì delle funzioni notevoli di α e β il cui valore è indipendente da α e da β, ed è uguale a $\frac{1}{4}$ o a $-\frac{1}{4}$ secondochè $\beta > \alpha$ o $\beta < \alpha$, e uguale a zero per $\beta=\alpha$, supposto però che α e β siano compresi fra 0 e 1 (0 escl. per α e β, e 1 escl. soltanto per α). Se poi α è uguale ad uno, i secondi membri della seconda e terza delle formole precedenti col cambiarvi $\alpha+t$ in β divengono funzioni della sola β che pei valori di questa variabile fra 0 e 1 (0 e 1 escl.) sono costantemente uguali a $-\frac{1}{2}$, mentre per $\beta=1$ sono identicamente zero.

Per $\nu=\pm\frac{1}{2}$ queste formole divengono anche molto più semplici.

113. Aggiungiamo che la funzione $\varphi(t, \alpha, h_n)$ per gli sviluppi attuali, dietro quanto si è visto nel §. 108, viene data dall' una o dall' altra delle formole:

$$\varphi(t, \alpha, h_n)=\frac{1}{2\pi}\frac{\beta^{2\nu+1}}{\beta^2-\alpha^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P'_\nu(\alpha z)P_\nu(\beta z)-P'_\nu(\beta z)P_\nu(\alpha z)}{P_\nu^2(z)}dy,$$

$$\varphi(t,\alpha,h_n)=\frac{1}{2\pi}\frac{\beta^{2\nu+1}}{\beta^2-\alpha^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h(2\nu+h)+z^2}{z\{P'_\nu(z)-hP_\nu(z)\}^2}\{P'_\nu(\alpha z)P_\nu(\beta z)-P'_\nu(\beta z)P_\nu(\alpha z)\}dy$$

secondochè siamo nel caso degli sviluppi $\sum_1^\infty q_n P_\nu(\lambda_n x)$ o nel caso degli altri due, essendo in ambedue queste formole $\beta=\alpha+t$ e $z=k+iy$ con $k=\left(\frac{2\nu+1}{2}+2n\right)\frac{\pi}{2}$ o $k=\left(\frac{2\nu+1}{2}+2n+1\right)\frac{\pi}{2}$ respettivamente. Queste funzioni poi possono anche rappresentarsi colle derivate rispetto a t delle espressioni (107), (108) o (109), e anche colle somme che si ottengono derivando ri-

spetto a t le espressioni (106), e aggiungendovi nel caso di $h=0$ la quantità $(2\nu+2)\beta^{2\nu+1}$.

114. E si può notare che per quanto la attuale funzione $\varphi(t, \alpha, h_n)$ non sia indipendente da α, come erano quelle relative agli altri sviluppi considerati precedentemente, essa però e il suo integrale $\int_0^t \varphi(t, \alpha, h_n)dt$ soddisfano in *ugual grado* per tutti i valori di α fra ε' e $1-\varepsilon_1$ e di t fra $-\alpha+\varepsilon''$ e $1-\alpha$ (ε_1, ε' e ε'' diversi da zero e positivi, ma arbitrariamente piccoli) a tutte le condizioni che si trovarono nel §. 108; poichè da ciò che precede apparisce che quando n sia preso superiore a uno stesso numero finito n_0 indipendente da t e da α, si troverà che, per qualunque valore di α fra ε_1 e 1 (gli estr. incl.), e pei valori di t fra $-\alpha+\varepsilon''$ e $1-\alpha$ l'integrale $\int_0^t \varphi(t, \alpha, h_n)dt$ e il prodotto $t\varphi(t, \alpha, h_n)$ sono sempre numericamente inferiori a un numero finito anche quando t si accosta indefinitamente a zero; e prendendo ancora $n>n_0$ e t discosto da zero più di ε, e compreso sempre fra $-\alpha+\varepsilon''$ e $1-\alpha$ si troverà pure che per tutti gli indicati valori di α fra ε' e 1 (gli estr. ancora incl.) la funzione $\varphi(t, \alpha, h_n)$ è sempre numericamente inferiore a un certo numero finito, e se α è compreso fra ε' e $1-\varepsilon_1$ l'integrale $\int_0^t \varphi(t, \alpha, h_n)$ è sempre accosto al suo limite più di un dato numero arbitrariamente piccolo σ, ec.

115. Per dare alcuni esempî di sviluppi particolari dedotti dai teoremi precedenti accenneremo i seguenti che sono degni di nota.

1.º Vogliasi la funzione che fra 0 e 1 è sempre uguale a 1 sviluppata in serie di funzioni P_ν o I_ν nel caso di $\nu>-\frac{1}{2}$.

Ricordando che:

$$\int_0^1 x^{2\nu+1} P_\nu(rx)\, dx = -\frac{1}{r} P'_\nu(r),$$

si ottengono subito i due sviluppi seguenti:

$$-2\sum_1^\infty \frac{P_\nu(\lambda_n x)}{\lambda_n P'_\nu(\lambda_n)},\ -2h\sum_1^\infty \frac{P_\nu(\lambda''_n x)}{\{h(2\nu+h)+\lambda''^2_n\}\,P_\nu(\lambda''_n)},$$

ove λ_n e λ''_n sono al solito le radici positive delle respettive equazioni $P_\nu(z)=0$, $zP'_\nu(z)-h\ P_\nu(z)=0$; donde, introducendo le funzioni di Bessel si hanno anche gli altri:

$$-2x^{-\nu}\sum_1^\infty \frac{I_\nu(\lambda_n x)}{\lambda_n I'_\nu(\lambda_n)},\ -2h\,x^{-\nu}\sum_1^\infty \frac{I_\nu(\lambda''_n x)}{\{h(2\nu+h)+\lambda''^2_n\}\,I_\nu(\lambda''_n)},$$

ove le λ_n e λ''_n sono le radici positive delle equazioni $I_\nu(z)=0$, $z\,I'_\nu(z)-(h+\nu)\,I_\nu(z)=0$; e questi sviluppi per x diverso da zero e da 1 e compreso fra 0 e 1 sono tutti uguali a 1, e per $x=1$ il primo è uguale a zero e il secondo è uguale a 1; talchè di quì si deduce anche la particolarità che la somma della serie $\sum_1^\infty \frac{1}{h(2\nu+h)+\lambda''^2_n}$ è uguale a $-\frac{1}{2h}$.

2.° Vogliasi la funzione che fra 0 e 1 è uguale a $P_\nu(\gamma\,x)$ ordinata per funzioni $P_\nu(\lambda_n x)$, $P_\nu(\lambda'_n x)$, e $P_\nu(\lambda''_n x)$ essendo γ una costante reale qualunque, e λ_n, λ'_n e λ''_n le solite radici delle equazioni $P_\nu(z)=0$, $P'_\nu(z)=0$, e nel caso sempre di $\nu>-\frac{1}{2}$.

Siccome si ha per r diverso da γ:

$$\int_0^1 x^{2\nu+1}P_\nu(\gamma\,x)P_\nu(r\,x)\,d\,x=\frac{\gamma P'_\nu(\gamma)\,P_\nu(r)-rP'_\nu(r)P_\nu(\gamma)}{r^2-\gamma^2},$$

si avranno gli sviluppi seguenti:

$$-2P_\nu(\gamma)\sum_1^\infty\frac{\lambda_n}{\lambda_n^2-\gamma^2}\frac{P_\nu(\lambda_n x)}{P'_\nu(\lambda_n)},\ P'_\nu(\gamma)\left\{-\frac{2\nu+2}{\gamma}+2\gamma\sum_1^\infty\frac{P_\nu(\lambda'_n x)}{(\lambda'^2_n-\gamma^2)P_\nu(\lambda'_n)}\right\},$$

$$2\{\gamma\,P'_\nu(\gamma)-h\,P_\nu(\gamma)\}\sum_1^\infty\frac{\lambda''^2_n\,P_\nu(\lambda''_n x)}{\{h(2\nu+h)+\lambda''^2_n\}(\lambda''^2_n-\gamma^2)\,P_\nu(\lambda''_n)},$$

che rappresentano $P_\nu(\gamma x)$ per x diverso da zero e da 1 e compreso fra 0 e 1, e per $x=1$ sono uguali il primo a zero e gli altri due a $P_\nu(\gamma)$; e sebbene il processo tenuto richieda che pel primo sviluppo γ non sia radice della equazione $P_\nu(z)=0$, e pel secondo non sia radice dell'altra $P'_\nu(z)=0$, è chiaro però che questi sviluppi possono riguardarsi come validi qualunque sia il valore di γ, quando per le serie che corrispondono a $\gamma=\pm\lambda_m$, $\gamma=\pm\lambda'_m$, e $\gamma=\pm\lambda''_m$ respettivamente si prendano quelle formate coi valori limiti dei singoli termini di quelle scritte sopra.

Da questi poi si ottengono gli altri sviluppi:

$$-2\,I_\nu(\gamma)\sum_1^\infty \frac{\lambda_n}{\lambda_n^2-\gamma^2}\,\frac{I_\nu(\lambda_n x)}{I'_\nu(\lambda_n)},$$

$$\{\gamma I'_\nu(\gamma)-\nu I(\gamma)\}\left\{-\frac{2\nu+2}{\gamma^2}x^\nu+2\sum_1^\infty\frac{I_\nu(\lambda'_n x)}{(\lambda'^2_n-\gamma^2)I_\nu(\lambda'_n)}\right\},$$

$$2\{\gamma I'_\nu(\gamma)-(h+\nu)I_\nu(\gamma)\}\sum_1^\infty\frac{\lambda''^2_n I_\nu(\lambda''_n x)}{\{h(2\nu+h)+\lambda''^2_n\}(\lambda''^2_n-\gamma^2)I_\nu(\lambda''_n)},$$

che rappresentano $I_\nu(\gamma x)$ per x diverso da zero e da uno e compreso fra 0 e 1, e per $x=1$ sono uguali il primo a zero e gli altri a $I_\nu(\gamma)$, e in questi le λ_n, λ'_n e λ''_n sono le radici positive delle equazioni $I_\nu(z)=0$, $zI'_\nu(z)-\nu I_\nu(z)=0$, $zI'_\nu(z)-(h+\nu)I_\nu(z)=0$.

Preso poi in particolare nelle formole precedenti $\nu=\frac{1}{2}$, si hanno le altre notevoli:

$$\operatorname{sen}\gamma x=2\pi\operatorname{sen}\gamma\sum_1^\infty(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2\pi^2-\gamma^2}\operatorname{sen}n\pi x,$$

$$\operatorname{sen}\gamma x=\left(\cos\gamma-\frac{\operatorname{sen}\gamma}{\gamma}\right)\left\{-\frac{3x}{\gamma}+2\gamma\sum_1^\infty\frac{\operatorname{sen}\lambda'_n x}{(\lambda'^2_n-\gamma^2)\operatorname{sen}\lambda'_n}\right\},$$

$$\operatorname{sen}\gamma x=2\{\gamma\cos\gamma-(1+h)\operatorname{sen}\gamma\}\sum_1^\infty\frac{\lambda''^2_n\operatorname{sen}\lambda''_n x}{\{h(2\nu+h)+\lambda''^2_n\}(\lambda''^2_n-\gamma^2)\operatorname{sen}\lambda''_n},$$

che valgono tutte per x diverso da uno e compreso fra 0 e 1, e la seconda e la terza valgono anche per $x=1$; e in queste, dietro l'osservazione fatta sopra, γ può supporsi qualunque, e le λ'_n e λ''_n sono le radici positive delle equazioni $z \cos z - \operatorname{sen} z = 0$, e $z \cos z - (1+h) \operatorname{sen} z = 0$.

Cambiando poi x in $\frac{x}{a}$ e γ in $a\gamma$, con a costante qualunque, si hanno altri sviluppi di $P_\nu(\gamma x)$, $I_\nu(\gamma x)$ e $\operatorname{sen} \gamma x$ che considerati per un valore speciale qualsiasi di x fra 0 e a (a escl. per il primo sviluppo) valgono per qualsiasi valore di γ; e così supponendo $a>1$ pel primo sviluppo e $a\geq 1$ per gli altri due, e facendo $x=1$, si ottengono sviluppi notevoli di $P_\nu(\gamma)$, $I_\nu(\gamma)$ e $\operatorname{sen} \gamma$. In particolare si hanno le formole seguenti:

$$\operatorname{sen} \gamma = 2\pi \operatorname{sen} a\gamma \sum_1^\infty (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2\pi^2 - a^2\gamma^2} \operatorname{sen} n\frac{\pi}{a},$$

$$\operatorname{sen} \gamma = \left(\cos a\gamma - \frac{\operatorname{sen} a\gamma}{a^2\gamma}\right)\left\{-\frac{3}{a\gamma} + 2a\gamma \sum_1^\infty \frac{\operatorname{sen}\frac{\lambda'_n}{a}}{(\lambda'^2_n - a^2\gamma^2)\operatorname{sen}\lambda'_n}\right\},$$

$$\operatorname{sen} \gamma = 2\{a\gamma \cos a\gamma - (1+h)\operatorname{sen} a\gamma\} \sum_1^\infty \frac{\lambda''^2_n \operatorname{sen}\frac{\lambda''_n}{a}}{\{h(2\nu+h)+\lambda''^2_n\}(\lambda''_n - a^2\gamma^2)\operatorname{sen}\lambda''_n}$$

che danno sviluppi di $\operatorname{sen} \gamma$ che valgono qualunque sia γ e per qualunque valore positivo di a e superiore a 1 per la prima, e superiore o uguale ad uno per le altre due.

Facendo $\gamma = \frac{\pi}{2}, = \pi, = \frac{3}{2}\pi, \ldots$ queste formole danno luogo ad altre che sono pure molto notevoli. Altre si ottengono facendo $a=1$ nelle due ultime, ec.

116. Passiamo ora a trovare coi metodi generali che precedono anche gli sviluppi di una funzione $f(x)$ per x fra -1 e 1 in serie $\sum_0^\infty A_n X_n$ di funzioni di Legendre X_n.

Questi sviluppi soddisfano come è noto alla condizione

$\int_{-1}^{1} X_m X_n \, dx = 0$ se $m \lessgtr n$, e per essi si ha $\int_{-1}^{1} X_n^2 \, dx = \frac{2}{2n+1}$,
però non può applicarsi il metodo dei §§. 90. e seg. perchè considerando la funzione X che soddisfa alla equazione:

$$\frac{\partial \left\{ (1-x^2) \frac{\partial X}{\partial x} \right\}}{\partial x} + z(z+1) X = 0$$

che per $z=n$ si riduce a quella delle X_n, si vede subito, dietro le osservazioni del §. 93, che questa funzione generale X pei valori di x fra -1 e 1, e pei valori reali e complessi di z non soddisfa alle condizioni di quel paragrafo.

Ci varremo perciò delle considerazioni più generali del §. 59. e prenderemo a esaminare la somma:

$$(109) \qquad \frac{1}{2} \sum_{0}^{n} (2n+1) X_n(\alpha) \int_0^t X_n(\alpha+t) \, dt,$$

insieme alla sua derivata rispetto a t:

$$\frac{1}{2} \sum_{0}^{n} (2n+1) X_n(\alpha) X_n(\alpha+t);$$

e poichè quest' ultima somma considerata come funzione di t fra $-1-\alpha$ e $1-\alpha$ è finita e continua e ha un numero finito di massimi e minimi per ogni valore speciale di n, così se vorremo limitarci a considerare le funzioni $f(x)$ del §. 72, basterà che esaminiamo la prima delle stesse somme.

Poniamo perciò $\alpha = \cos\theta', \alpha+t = \beta = \cos\theta$, con θ e θ' compresi fra 0 e π (0 e π incl.), e ricordiamo che da una formola nota si ha:

$$X_n(\cos\theta) X_n(\cos\theta') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X_n(\cos\gamma) \, d\varphi,$$

con:

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta'\cos(\varphi-\varphi'),$$

essendo (θ, φ), (θ', φ') le coordinate polari sferiche di due punti M e M′ di una sfera di raggio uno, e γ la distanza sferica di questi punti.

Si avrà:

$$\frac{1}{2}\sum_0^n(2n+1)X_n(\alpha)\int_0^t X_n(\alpha+t)dt = -\frac{1}{4\pi}\sum_0^n(2n+1)\int_{\theta'}^{\theta}\operatorname{sen}\theta d\theta\int_0^{2\pi}X_n(\cos\gamma)\,d\varphi,$$

donde ricordando che:

$$\sum_0^n(2n+1)X_n(\cos\gamma) = -\frac{1}{\operatorname{sen}\gamma}\left\{\frac{\partial X_n}{\partial\gamma}+\frac{\partial X_{n+1}}{\partial\gamma}\right\},$$

si troverà anche:

$$\frac{1}{2}\sum_0^n(2n+1)X_n(\alpha)\int_0^t X_n(\alpha+t)\,dt = \frac{1}{4\pi}\int_{\theta'}^{\theta}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{\partial X_n}{\partial\gamma}+\frac{\partial X_{n+1}}{\partial\gamma}\right\}\frac{\operatorname{sen}\theta\,d\theta d\varphi}{\operatorname{sen}\gamma};$$

e poichè $d\theta$ e dt sono di segno contrario, indicando con $d\sigma$ l'elemento superficiale sferico, e fissando di prendere nelle formole seguenti il segno superiore o l'inferiore secondochè t è positivo o negativo, si potrà scrivere:

$$\frac{1}{2}\sum_0^n(2n+1)X_n(\alpha)\int_0^t X_n(\alpha+t)dt = \mp\frac{1}{4\pi}\int\int\left\{\frac{\partial X_n}{\partial\gamma}+\frac{\partial X_{n+1}}{\partial\gamma}\right\}\frac{d\sigma}{\operatorname{sen}\gamma},$$

intendendo che l'integrale del secondo membro sia esteso all'area sferica A compresa fra i paralleli θ' e θ.

Ma prendendo un nuovo sistema di coordinate polari sferiche γ e φ_1 col polo nel punto fisso M′, si ha $d\sigma = \operatorname{sen}\gamma d\gamma d\varphi_1$; quindi sarà:

$$\frac{1}{2}\sum_0^n(2n+1)X_n(\alpha)\int_0^t X_n(\alpha+t)dt=\mp\int\int\left\{\frac{\partial X_n}{\partial\gamma}+\frac{\partial X_{n+1}}{\partial\gamma}\right\}d\gamma\,d\varphi_1,$$

e così potremo eseguire subito l' integrazione relativa a γ.

Nel fare le limitazioni degli integrali noteremo che se θ' non è $=0$ o $=\pi$, e se il meridiano iniziale delle longitudini φ_1 è preso tangente all' antico parallelo θ', mentre φ_1 và da 0 a π, su questo parallelo si resta sempre nel punto M' nel quale $X_n+X_{n+1}=2$, e se $\theta'=\frac{\pi}{2}$ i meridiani $\varphi_1=0$ e $\varphi_1=\pi$ coincidono col cerchio $\theta'=\frac{\pi}{2}$; e noteremo pure che se nell' area sferica A cade il punto M'_1 diametralmente opposto a M', in questo punto sarà $\gamma=\pi$ e $X_n+X_{n+1}=0$; e quindi indicando con $\int_\theta$, $\int_{\theta'}$ integrali relativi a φ_1 estesi ai cerchi θ e θ' si avrà evidentemente:

$$\frac{1}{2}\sum_0^n(2n+1)X_n(\alpha)\int_0^t X_n(\alpha+t)dt=\pm\frac{1}{2}\mp\frac{1}{4\pi}\int_\theta(X_n+X_{n+1})d\varphi_1\pm\int_{\theta'}(X_n+X_{n+1})d\varphi_1,$$

e il primo integrale del secondo membro mancherà se il cerchio θ si riduce a un punto (polo), come mancherà il secondo se θ' è l' equatore (antico) della sfera.

Ricordando ora che quando γ è fra ε e $\pi-\varepsilon$ con ε diverso da zero, $X_n(\cos\gamma)$ al crescere indefinito di n converge a zero e in ugual grado dell' ordine di $\frac{1}{\sqrt{n\,\mathrm{sen}\,\varepsilon}}$ si vede subito intanto che se vi è l' integrale $\int_\theta(X_n+X_{n+1})d\varphi_1$, e non è $\theta=\pi-\theta'$ (onde non sia mai $\gamma=\pi$), esso al crescere indefinito di n converge a zero, e si vede inoltre che vi convergerà anche in ugual grado quando θ cade in intervalli che non comprendono i punti $\pi-\theta'$

e θ', o quando t è tale che $\beta=\alpha+t$ cade in intervalli che non comprendono i punti $\pm\alpha$.

Se poi vi è l' integrale $\int_{\theta'}(X_n+X_{n+1})d\varphi_1$, escludendo sul parallelo θ' il punto M′ con un piccolo intorno nel quale φ_1 andrà da π a $\pi+\varepsilon$ e da $2\pi-\varepsilon$ a 2π e X_n+X_{n+1} rimarrà finito, si vede subito che nella porzione rimanente dello stesso parallelo il numero γ per quanto possa essere piccolo o essere prossimo a π non si accosterà a zero o a π più di un certo numero positivo ε_1, e quindi in questa porzione X_n+X_{n+1} convergerà a zero in ugual grado; talchè è forza concludere che anche l' integrale $\int_{\theta'}(X_n+X_{n+1})\,d\theta$ converge a zero al crescere indefinito di n. Similmente se, essendovi l' integrale $\int_{\theta}(X_n+X_{n+1})d\theta$, si ha $\theta=\pi-\theta'$, escludendo con un piccolo intorno sul parallelo θ il punto M'_1 diametralmente opposto ad M′, si trova al modo stesso che l'integrale medesimo tende anch'esso a zero; dunque si può ora evidentemente asserire che quando t è diverso da zero la somma (109) al crescere indefinito di n converge verso il limite $\frac{1}{2}$ se t è positivo e verso il limite $-\frac{1}{2}$ se t è negativo, e converge anche in ugual grado verso questi limiti per tutti i valori di t che cadono in intervalli tali che il punto $\beta=\alpha+t$ non venga mai a coincidere coi punti α e $-\alpha$.

Aggiungendo dunque l'osservazione che, se $\alpha=1$ si riscontra subito che la somma della serie (109) per t diverso da zero e negativo è uguale a -1, e se $\alpha=-1$ la stessa somma per t diverso da zero e positivo è uguale ad uno, e ricordando quanto si disse nei §§. 53, 59, 72 e 73 si ottiene ora il teorema noto seguente: „ se $f(x)$ è una funzione sempre finita e atta all' integrazione „ fra -1 e 1, e è tale che scomposto se occorre questo inter- „ vallo in un numero finito di parti viene a soddisfare in cia-

„ scuna di queste parti a una almeno delle condizioni a), b), c) „ del §. 72, allora essa sarà sviluppabile secondo la serie „ $\sum_{0}^{\infty} A_n X_n$ con

$$A_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) X_n \, dx$$

„ per tutti i punti x nei quali essa non presenta discontinuità „ di seconda specie, purchè negli intorni a destra e negli intorni „ a sinistra di questi punti x e dei punti simmetrici $-x$ la „ funzione $f(x)$ soddisfi alle condizioni a) o b) del §. 72 o „ all'altra del §. 73 che la somma ΣD_s delle oscillazioni della „ funzione medesima $f(x)$ in intervalli ognor più piccoli presi „ negli stessi intorni e senza tener conto del valore nei punti x „ e $-x$ possa rendersi minore di quel numero che più ci piace „ dipendentemente dalla piccolezza degli intorni medesimi; con „ questo però che nei punti interni x di continuità e in quelli „ di discontinuità di prima specie la somma della serie sarà „ $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$, e nei punti estremi $+1$ e -1 sarà „ respettivamente $f(1-0)$ e $f(-1+0)$ „.

117. Merita poi di essere notato che per gli attuali sviluppi in serie di funzioni X_n si ha:

$$\varphi(t, \alpha, h_n) = \frac{1}{2} \sum_{0}^{n} (2n+1) X_n(\alpha) X_n(\alpha+t),$$

e, per essere $\int_p^q X_n(x) dx = \left[\frac{X_{n+1} - X_{n-1}}{2n+1}\right]_p^q$, si ha la formola notevole:

$$\pm 1 = \sum_{0}^{\infty} X_n(\alpha) \{X_{n+1}(\alpha+t) - X_{n-1}(\alpha+t) - X_{n+1}(\alpha) + X_{n-1}(\alpha)\}$$

ove nel primo membro deve prendersi il segno $+$ o $-$ secon-

dochè t è positivo o negativo, e s' intende che α sia compreso fra -1 e 1 (gli estr. escl.), e t sia diverso da zero e compreso fra $-1-\alpha$ e $1-\alpha$. Per $\alpha=\pm 1$ la somma delle serie del secondo membro è uguale $a \mp 2$.

Oltre a ciò, coi ragionamenti stessi del paragrafo precedente, si riscontra che l' integrale $\int_0^t \varphi(t, \alpha, h_n)dt$ e così anche la somma dei primi $n+1$ termini dell' ultima serie, considerate come funzioni di α e di t, e pei valori di t discosti da zero più di ε_1 e compresi fra $-1-\alpha$ e $1-\alpha$ (ε e ε_1 diversi da zero e positivi ma arbitrariamente piccoli) convergono in ugual grado verso i loro limiti respettivi per tutti i valori di α fra $-1+\varepsilon$ e $1-\varepsilon$; e per α compreso fra -1 e $-1+\varepsilon$ o fra $1-\varepsilon$ e 1 lo stesso integrale e così la somma di un numero qualunque di termini della serie restano sempre numericamente inferiori a un numero finito.

118. Come ultima applicazione dei metodi generali che abbiamo dati, voglio ora dimostrare che per le funzioni $f(x)$ date arbitrariamente fra 0 e 2K si ha anche lo sviluppo seguente:

$$f(\alpha)=\frac{k'}{\pi}\sum_0^\infty \frac{\Theta(\alpha+\lambda_n)}{\Theta(\alpha)\Theta^2(\lambda_n)(1-\zeta\,\mathrm{sn}^2\lambda_n)}\int_0^{2K} f(x)\frac{\Theta(x-\lambda_n)}{\Theta(x)}dx, \tag{110}$$

ove le quantità $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n, \ldots$ sono le radici della equazione $H'(z)=0$ che si trovano sull' asse delle y, e λ_0 è la radice K della stessa equazione, essendo $\Theta(z)$ e $H(z)$ le note funzioni di Jacobi, e essendo $\zeta=\frac{I}{K}=\frac{1}{K}\int_0^K k^2\mathrm{sn}^2 z\, dz$, e k, k', K, K' le notissime quantità che s' incontrano nella teorica delle funzioni ellittiche (*).

(*) Quando ebbi il piacere di passare alcuni giorni col sig. Mittag-Leffler nel tempo in cui Egli fu a Pisa (Aprile 1880), seppi da lui che la forma (110) dello sviluppo di $f(\alpha)$ era stata data dal sig. Hermite nelle sue lezioni sulle funzioni ellittiche. Il sig. Mittag-Leffler mi comunicò gentilmente anche alcune sue note su quelle lezioni, ma in quelle note ho trovato soltanto la forma dello sviluppo, senza trovarvi una dimostrazione della possibilità dello sviluppo medesimo.

Incominciamo perciò dal ricordare che da formole note si ha:

$$\mathrm{sn}\, z = \frac{\mathrm{H}(z)}{\sqrt{k}\,\Theta(z)}\,,\quad \left[\frac{\mathrm{H}'(z)}{\mathrm{H}(z)}\right]' = \frac{\mathrm{I}}{\mathrm{K}} - \frac{1}{\mathrm{sn}^2 z} = \zeta - \frac{1}{\mathrm{sn}^2 z}\,,$$

e quindi sarà:

$$\frac{\mathrm{H}''(\lambda_n)}{\mathrm{H}(\lambda_n)} = -\frac{1-\zeta\,\mathrm{sn}^2\lambda_n}{\mathrm{sn}^2\lambda_n}\,,\quad \text{e}\quad 1-\zeta\,\mathrm{sn}^2\lambda_n = -\frac{\mathrm{H}(\lambda_n)\,\mathrm{H}''(\lambda_n)}{k\,\Theta^2(\lambda_n)}\,,$$

di modo che lo sviluppo precedente può anche scriversi:

$$(111)\qquad -\frac{k\,k'}{\pi}\sum_0^\infty \frac{\Theta(\alpha+\lambda_n)}{\Theta(\alpha)\,\mathrm{H}(\lambda_n)\,\mathrm{H}''(\lambda_n)}\int_0^{2\mathrm{K}} f(x)\,\frac{\Theta(x-\lambda_n)}{\Theta(x)}\,dx\,,$$

e se si osserva che $\dfrac{1}{\mathrm{H}''(\lambda_n)}$ è il residuo c_n della funzione $u(z) = \dfrac{1}{\mathrm{H}'(z)}$ nel punto d'infinito $z = \lambda_n$, questo sviluppo si ridurrà anche all' altro:

$$(112)\qquad -\frac{kk'}{\pi}\sum_0^\infty c_n \frac{\Theta(\alpha+\lambda_n)}{\Theta(\alpha)\mathrm{H}(\lambda_n)}\int_0^{2\mathrm{K}} f(x)\,\frac{\Theta(x-\lambda_n)}{\Theta(x)}\,dx\,.$$

Coi processi dunque dei §§. 57 e seg., per decidere se e in quali casi questo sviluppo è applicabile a $f(x)$, si prenderà a esaminare la serie:

$$(113)\qquad -\frac{kk'}{\pi}\sum_0^\infty c_n \frac{\Theta(\alpha+\lambda_n)}{\Theta(\alpha)\mathrm{H}(\lambda_n)}\int_0^{t} \frac{\Theta(\alpha+t-\lambda_n)}{\Theta(\alpha+t)}\,dt\,,$$

insieme alla somma:

$$(114)\qquad -\frac{kk'}{\pi}\sum_0^n c_n \frac{\Theta(\alpha+\lambda_n)}{\Theta(\alpha)\mathrm{H}(\lambda_n)}\int_0^{t} \frac{\Theta(\alpha+t-\lambda_n)}{\Theta(\alpha+t)}\,dt$$

dei suoi primi n termini e alla derivata rispetto a t di questa somma per tutti i valori di t fra $-\alpha$ e $2\,K-\alpha$, essendo α compreso fra 0 e $2\,K$; e pel nostro scopo basterà vedere se per queste quantità sono o nò soddisfatte le solite condizioni generali che si avevano nel §. 57. per le espressioni (6) e (5) e per la derivata della (5), con più la condizione che la quantità allora indicata con G venga ora ad essere uguale ad $\frac{1}{2}$. E quando queste condizioni si trovino soddisfatte, la derivata rispetto a t della espressione (114) figurerà come la solita funzione $\varphi(t\,,\alpha\,,h_n)$ relativa agli attuali sviluppi, ec.

119. Seguendo ora i metodi dei §§. 64. e seg.. si prenderà a studiare la funzione:

$$(115)\qquad \theta(z)=-\frac{k\,k'}{\pi\,\Theta(\alpha)}\frac{\Theta(\alpha+z)}{\mathrm{H}(z)\,\mathrm{H}'(z)}\int_0^t\frac{\Theta(\alpha+t-z)}{\Theta(\alpha+t)}\,d\,t$$

che è monodroma e continua in tutto il piano, e ad essa si applicherà l'integrazione lungo un contorno rettangolare C_n coi lati paralleli all'asse delle y condotti pei punti $x=K+\varepsilon$, $x=-K+\varepsilon$ dell'asse delle x, e cogli altri due lati condotti pei punti $y=(2n+1)K'$, $y=-(2n+1)K'$ dell'asse delle y, essendo ε compreso fra 0 e K (0 e K escl.).

Così lo studio della somma (114) si ridurrà a quello della differenza equivalente:

$$(116)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\theta(z)\,d\,z-\Sigma\,\gamma_r\,,$$

essendo γ_r i residui corrispondenti ai punti d'infinito di $\theta(z)$ che cadono entro C_n e che sono distinti dai punti λ_n, e lo studio della serie (113) si ridurrà a quello del limite per $n=\infty$ di questa differenza; di modo che per essa dovranno essere soddisfatte le condizioni stesse che si avevano nel §. 68. per la espressione (40).

Ora, si dimostra che le radici reali di $H'(z)=0$ sono soltanto nei punti $z=(2n+1)K$, e quelle complesse non possono essere che sulle verticali condotte pei punti $z=2pK$ (p intero); dunque, entro C_n la funzione $H'(z)$ non si annulla altro che nei punti λ_n, e in conseguenza le γ_r si riducono ai residui di $\theta(z)$ corrispondenti ai punti d' infinito che provengono dall' annullarsi di $H(z)$.

In questi punti si ha $z=2\,r\,i\,K'(r=0\,,\pm 1\,,\pm 2\,,\ldots \pm n)$, e il residuo corrispondente di $\frac{1}{H(z)}$ è $\frac{1}{H'(2riK')}$; quindi sarà evidentemente:

$$\gamma_r = -\frac{k\,k'}{\pi\,\Theta(\alpha)}\frac{\Theta(\alpha+2\,r\,i\,K')}{H'^2(2\,r\,i\,K')}\int_0^t \frac{\Theta(\alpha+t-2riK')}{\Theta(\alpha+t)}\,d\,t\,;$$

e osservando che da formole note si ha:

$$(117)\quad \begin{cases} \Theta\,(z+2riK')=(-1)^r\,\Theta(z)\,e^{-\frac{ri\pi}{K}(z+riK')}, \\ H(z+2riK')=(-1)^r H(z)\,e^{-\frac{ri\pi}{K}(z+riK')} \\ H'(z+2riK')=(-1)^r\left\{H'(z)-\frac{ri\pi}{K}\,H(z)\right\}\,e^{-\frac{ri\pi}{K}(z+riK')}, \end{cases}$$

si vede subito che sarà:

$$\gamma_r = -\frac{kk'}{\pi H'^2(0)}\int_0^t e^{\frac{ri\pi t}{K}}\,d\,t\,;$$

e poichè, ricavando $H'(z)$ dalla formola $H(z)=\sqrt{k}\,\Theta(z)\,\mathrm{sn}\,z$, e poi facendo $z=0$ si trova $H'(0)=\sqrt{k}\,\Theta(0)=\sqrt{\frac{2\,k\,k'\,K}{\pi}}$ per-

chè $\Theta(0)=\sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}$, sarà anche:

$$\gamma_r=-\frac{1}{2K}\int_0^t e^{\frac{ri\pi t}{K}}\,dt,$$

e in conseguenza si avrà:

$$\Sigma\gamma_r=-\frac{1}{K}\int_0^t\left(\frac{1}{2}+\sum_1^n\cos\frac{r\pi t}{K}\right)dt=-\frac{1}{2K}\int_0^t\frac{\operatorname{sen}(2n+1)\frac{\pi t}{2K}}{\operatorname{sen}\frac{\pi t}{2K}}\,dt,$$

o anche, ponendo $\frac{\pi t}{2K}=\xi$;

$$\Sigma\gamma_r=-\frac{1}{\pi}\int_0^\xi\frac{\operatorname{sen}(2n+1)\xi}{\operatorname{sen}\xi}\,d\xi,$$

di modo che la differenza (116) si ridurrà a:

$$(118)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\theta(z)\,dz+\frac{1}{\pi}\int_0^\xi\frac{\operatorname{sen}(2n+1)\xi}{\operatorname{sen}\xi}\,d\xi.$$

Ora nel primo termine gli integrali estesi ai lati paralleli all' asse delle y si distruggono identicamente, perchè nella integrazione questi lati sono percorsi in senso opposto, e nei punti di essi che si trovano alla stessa distanza dall' asse delle x i valori di $\theta(z)$ sono uguali; dunque l' integrale $\int_{C_n}\theta(z)\,dz$ si riduce ai due integrali estesi ai lati orizzontali sui quali $z=x\pm(2n+1)iK'$, e x và da $-K+\varepsilon$ a $K+\varepsilon$, o anche se vuolsi da $-K$ a K.

Ma su questi lati si ha:

$$\theta(z)=-\frac{kk'}{\pi\Theta(\alpha)}\frac{\Theta(\alpha+x\pm iK'\pm 2niK')}{H(x\pm iK'\pm 2niK')H'(x\pm iK'\pm 2niK')}\int_0^t\frac{\Theta(\alpha+t-x\mp iK'\mp 2niK)}{\Theta(\alpha+t)}\,dt,$$

o anche, a causa delle (117):

$$(119)\quad \theta(z) = -\frac{kk'}{\pi\Theta(\alpha)} \frac{\Theta(\alpha+x\pm i\mathrm{K}')}{\mathrm{H}^2(x\pm i\mathrm{K}')\left\{\frac{\mathrm{H}'(x\pm i\mathrm{K}')}{\mathrm{H}(x\pm i\mathrm{K}')} \mp \frac{n i\pi}{\mathrm{K}}\right\}} \int_0^t \frac{\Theta(\alpha+t-x\mp i\mathrm{K}')}{\Theta(\alpha+t)} e^{\pm\frac{ni\pi t}{\mathrm{K}}}$$

dunque questi valori di $\theta(z)$ restano sempre finiti insieme alle loro derivate rispetto a t, e al crescere indefinito di n tendono a zero e vi tendono in ugual grado per tutti i valori di x, e anche per tutti i valori di t; dimodochè l' integrale $\int_{\mathrm{C}_n} \theta(z)\, dz$, e la sua derivata rapporto a t sono sempre finiti, e al crescere indefinito di n tendono à zero per ogni valore finito di α e di t, e vi tendono anche in ugual grado.

Per questo, e perchè l' ultimo termine della espressione (118) è l' integrale che figura negli sviluppi di Fourier, le verificazioni da farsi sulle espressioni precedenti vengono ricondotte a quelle che si fecero pel caso di questi ultimi sviluppi; dunque si può ora senz' altro affermare che, presa come funzione $\varphi(t, \alpha, h_n)$ la derivata della somma (114) o della espressione (118), sono soddisfatte per essa tutte le condizioni che si hanno per la funzione corrispondente agli sviluppi di Fourier, tranne tutt' al più quella relativa all' essere sempre crescenti o sempre decrescenti i valori massimi o minimi dell' integrale $\int_0^t \varphi(t, \alpha, h_n)\, dt$; e si può quindi in particolare concludere che: „se $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n, ..$ sono le radici della equazione „ $\mathrm{H}'(z)=0$ che si trovano sull'asse delle y, e λ_0 è la radice K „ della stessa equazione, una funzione $f(x)$ data arbitrariamente fra 0 e 2 K può rappresentarsi analiticamente secondo „ la serie:

$$(120)\quad \frac{k'}{\pi} \sum_0^{\infty} \frac{\Theta(\alpha+\lambda_n)}{\Theta(\alpha)\Theta^2(\lambda_n)(1-\zeta \mathrm{sn}^2\lambda_n)} \int_0^{2\mathrm{K}} f(x) \frac{\Theta(x-\lambda_n)}{\Theta(x)} dx\,,$$

„ o:

$$(121)\qquad -\frac{kk'}{\pi}\sum_{0}^{\infty}\frac{\Theta(\alpha+\lambda_n)}{\Theta(\alpha)\,\mathrm{H}(\lambda_n)\,\mathrm{H}''(\lambda_n)}\int_0^{2\mathrm{K}} f(x)\frac{\Theta(x-\lambda_n)}{\Theta(x)}\,dx\,,$$

„ e questi sviluppi varranno pei punti α fra 0 e 2K pei quali $f(x)$
„ è finita e soddisfa a una almeno delle condizioni 1.ª 2.ª 3.ª
„ e 4.ª del teorema della pag. 266; con questo però che pei punti
„ α delle discontinuità ordinarie nell' *interno* dell' intervallo la
„ somma della serie sarà al solito $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, e pei
„ punti estremi (quando ad essi lo sviluppo è applicabile) la
„ stessa somma sarà la solita media $\frac{f(+0)+f(2\,\mathrm{K}-0)}{2}$, come
„ nel caso degli sviluppi di Fourier.

È poi da notare che, come nel caso degli sviluppi di Fourier, le indicate condizioni, invece di verificarsi per $f(x)$ nell' intorno del punto α che si avrà da considerare, basterà che si verifichino per la funzione di t $f(\alpha+t)+f(\alpha-t)$ nell' intorno del punto $t=0$; e per questo le indicate condizioni potranno anche trasformarsi in altre, come si fece nel caso degli sviluppi di Fourier ec.

120. Aggiungiamo che avuto riguardo ai valori (119) che ha $\theta(z)$ sui lati orizzontali di C_n, si vede subito che per gli attuali sviluppi la funzione corrispondente $\varphi_s(t, \alpha, h_n)$ può porsi sotto la forma:

$$\varphi(t,\alpha,h_n)=\frac{kk'}{2\pi^2 i\Theta(\alpha)\,\Theta(\alpha+t)}\int_{-\mathrm{K}}^{\mathrm{K}}\left[\frac{\Theta(\alpha+x+i\mathrm{K}')\Theta(\alpha+t-x-i\mathrm{K}')e^{\frac{ni\pi t}{\mathrm{K}}}}{\mathrm{H}(x+i\mathrm{K}')\left\{\mathrm{H}'(x+i\mathrm{K}')-\frac{ni\pi}{\mathrm{K}}\mathrm{H}(x+i\mathrm{K}')\right\}}-\right.$$

$$\left.-\frac{\Theta(\alpha+x-i\mathrm{K}')\Theta(\alpha+t-x+i\mathrm{K}')e^{-\frac{ni\pi t}{\mathrm{K}}}}{\mathrm{H}(x-i\mathrm{K}')\left\{\mathrm{H}'(x-i\mathrm{K}')+\frac{ni\pi}{k}\mathrm{H}(x-i\mathrm{K}')\right\}}\right]dx-\frac{1}{2\mathrm{K}}\frac{\operatorname{sen}(2n+1)\frac{\pi t}{2\mathrm{K}}}{\operatorname{sen}\frac{\pi t}{2\mathrm{K}}},$$

e il primo termine potrebbe anche trasformarsi giacchè, astrazion fatta dai fattori esponenziali che vi figurano, esso è una funzione simmetrica di t e di α che è doppiamente periodica coi periodi $2\mathrm{K}$ e $2i\mathrm{K}'$, e di essa se ne trova facilmente la espressione per funzioni sn.

Un altra forma della attuale funzione $\varphi(t,\alpha,h_n)$ si ottiene prendendo la derivata rispetto a t della espressione (114), e si ha così:

$$\varphi(t\,,\alpha\,,h_n)=-\frac{kk'}{\pi}\sum_0^n\frac{\Theta(\alpha+\lambda_n)\,\Theta(\alpha+t-\lambda_n)}{\mathrm{H}(\lambda_n)\,\mathrm{H}''(\lambda_n)\,\Theta(\alpha)\Theta(\alpha+t)}\,.$$

121. Oltre a ciò per quanto si è dimostrato sulla serie (113) e sulla espressione (118), si può anche asserire che per α compreso fra 0 e $2\mathrm{K}$ e per t diverso da zero e compreso fra $-\alpha$ e $2\mathrm{K}-\alpha$ ($-\alpha$ e $2\mathrm{K}-\alpha$ escl. quando $\alpha=2\mathrm{K}$ o $\alpha=0$) si ha la formola notevole:

$$\pm\frac{1}{2}=-\frac{kk'}{\pi}\sum_0^\infty\frac{\Theta(\alpha+\lambda_n)}{\Theta(\alpha)\mathrm{H}(\lambda_n)\mathrm{H}''(\lambda_n)}\int_0^t\frac{\Theta(\alpha+t-\lambda_n)}{\Theta(\alpha+t)}\,dt\,,$$

ove nel primo membro deve prendersi il segno superiore o l' inferiore secondochè t è positivo o negativo.

Se poi $\alpha=0$ e $t=2\mathrm{K}$, o se $\alpha=2\mathrm{K}$ e $t=-2\mathrm{K}$ allora il primo membro di questa formola deve cambiarsi in ± 1, di modo che si ha la relazione notevole:

$$1=-\frac{kk'}{\pi}\sum_0^\infty\frac{\Theta(\lambda_n)}{\Theta(0)\,\mathrm{H}(\lambda_n)\,\mathrm{H}''(\lambda_n)}\int_0^{2\mathrm{K}}\frac{\Theta(t-\lambda_n)}{\Theta(t)}\,dt\,,$$

la quale, osservando che $\Theta(0)=\sqrt{\frac{2k'\mathrm{K}}{\pi}}$, e che come vedremo al §. 125 si ha $\int_0^{2\mathrm{K}}\frac{\Theta(t-\lambda_n)}{\Theta(t)}\,dt=\pi\sqrt{\frac{\pi}{2kk'\mathrm{K}}}\,\frac{\mathrm{H}(\lambda_n)}{\operatorname{sen}\frac{\pi\lambda_n}{2\mathrm{K}}}$,

si può ridurre all' altra più semplice :

$$1 = -\frac{\pi\sqrt{k}}{2K}\sum_0^\infty \frac{\Theta(\lambda_n)}{H''(\lambda_n)\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi\lambda_n}{2K}}\ ;$$

che lega fra loro le radici $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n, ...$

In queste formole poi a $H(\lambda_n)\,H''(\lambda_n)$ potrebbe sostituirsi la espressione equivalente $-k\,\Theta^2(\lambda_n)\,(1-\zeta\,\mathrm{sn}^2\lambda_n)$, e alle funzioni $\frac{\Theta(\alpha+\lambda_n)\Theta(\alpha+t-\lambda_n)}{\Theta(\alpha)\Theta(\alpha+t)}$, $\frac{\Theta(\lambda_n)\,\Theta(t-\lambda_n)}{\Theta(0)\,\Theta(t)}$ potrebbero sostituirsi le espressioni corrispondenti per funzioni sn.

122. Aggiungiamo che oltre allo sviluppo (120) o (121) di $f(\alpha)$ ordinato per funzioni $\frac{\Theta(\alpha+\lambda_n)}{\Theta(\alpha)}$ „ si ha anche il se-„ guente :

$$(122)\qquad f(\alpha) = \frac{kk'}{\pi}\sum_0^\infty \frac{H(\alpha+\lambda'_n)}{\Theta(x)\,\Theta(\lambda'_n)\,\Theta''(\lambda'_n)}\int_0^{2K} f(x)\,\frac{H(x-\lambda'_n)}{\Theta(x)}\,dx$$

„ che vale negli stessi casi finchè α è compreso fra 0 e 2K „ (0 e 2K escl.), ed è ordinato per funzioni $\frac{H(\alpha+\lambda'_n)}{\Theta(\alpha)}$, ove „ λ'_0 e λ'_1 sono le radici 0 e K della equazione $\Theta'(x)=0$ e „ $\lambda'_2, \lambda'_3, .., \lambda'_n, ..$ sono le radici puramente immaginarie di „ questa equazione. Invece pei punti estremi $\alpha=0$ e $\alpha=2K$, „ quando questi punti sono da considerarsi, questo sviluppo „ dà respettivamente $\frac{f(+0)-f(2K-0)}{2}$ e $\frac{f(2K-0)-f(0)}{2}$ „.

La dimostrazione della possibilità di questo nuovo sviluppo si fà con un processo del tutto simile a quello tenuto nel §. 119 per la dimostrazione relativa allo sviluppo (121); e noi quindi l'accenneremo soltanto brevemente.

Si osserverà perciò che, siccome $\frac{1}{\Theta''(\lambda'_n)}$ è il residuo di $\frac{1}{\Theta'(z)}$ nel punto λ'_n, così in questo caso, invece della funzio-

ne $\theta(z)$ data dalla (115) gioverà prendere la funzione analoga:

$$\theta(z) = \frac{kk'}{\pi\Theta(\alpha)}\frac{H(\alpha+z)}{\Theta(z)\,\Theta'(z)}\int_0^t \frac{H(\alpha+t-z)}{\Theta(\alpha+t)}\,dt\,;$$

e a questa si applicherà l' integrazione lungo un contorno rettangolare C_n che sarà formato come quello del §, 119, colla sola differenza che i lati del rettangolo paralleli all'asse delle x si condurranno pei punti $y=2nK'$, $y=-niK'$ dell' asse delle y invece che pei punti $y=(2n+1)K'$, $y=-(2n+1)K'$.

Con ciò si avrà da studiare la differenza

$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\theta(z)\,dz - \Sigma\gamma_r$ analoga alle (116); e siccome entro C_n la $\Theta'(z)$ non si annulla altro che nei punti $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$, le γ_r verranno ora ad essere i residui di $\theta(z)$ corrispondenti ai punti $z=\pm(2r+1)iK'$ $(r=0, 1, 2, \ldots, n-1)$ nei quali $\theta(z)$ diviene infinita per l' annullarsi di $\Theta(z)$.

Ora, poichè in questi punti il residuo di $\frac{1}{\Theta(z)}$ è $\frac{1}{\Theta'(\pm(2r+1)iK')}$, si avrà:

$$\gamma_r = \frac{kk'}{\pi\Theta(\alpha)}\frac{H(\alpha+(2r+1)iK')}{\Theta'^2[2r+1)iK']}\int_0^t \frac{H(\alpha+t-(2r+1)iK')}{\Theta(\alpha+t)}\,dt,$$

ovvero, per le (117):

$$\gamma_r = \frac{kk'}{\pi\Theta(\alpha)}\frac{H(\alpha+iK')}{\Theta'^2(iK')}\int_0^t \frac{H(\alpha+t-iK')}{\Theta(\alpha+t)}\,e^{\frac{ri\pi t}{K}}\,dt\,;$$

talchè, essendo:

$$\Theta(z+iK') = i\,q^{-\frac{1}{4}}\,e^{-\frac{i\pi z}{2K}}\,H(z),$$

$$H(z+iK') = i\,q^{-\frac{1}{4}}\,e^{-\frac{i\pi z}{2K}}\,\Theta(z)$$

$$\Theta'(iK') = i\,q^{-\frac{1}{4}}\,H'(0) = i\,q^{-\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{2kk'K}{\pi}},$$

con $q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}$, sarà:

$$\gamma_r = -\frac{1}{2K}\int_0^t e^{(2r+1)\frac{i\pi t}{2K}} dt,$$

e quindi, ponendo $\frac{\pi t}{2K} = \xi$ si troverà:

$$\sum \gamma_r = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\xi} [\cos\xi + \cos 3\xi + .. + \cos(2n-1)\xi]\, d\xi,$$

da cui, osservando che:

$$\sum_0^{n-1} \cos(2r+1)\xi = \frac{1}{2} + \sum_1^{2n}\cos r\xi - \left(\frac{1}{2} + \sum_1^{n}\cos 2r\xi\right) = \frac{\operatorname{sen}(4n+1)\frac{\xi}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\xi}{2}} - \frac{\operatorname{sen}(2n+1)\xi}{2\operatorname{sen}\xi},$$

si deduce che:

$$\sum \gamma_r = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\xi_1}\frac{\operatorname{sen}(4n+1)\xi_1}{\operatorname{sen}\xi_1}\, d\xi_1 + \frac{1}{\pi}\int_0^{\xi}\frac{\operatorname{sen}(2n+1)\xi}{\operatorname{sen}\xi}\, d\xi,$$

con $\xi_1 = \frac{\pi t}{4K}$; e quindi questa somma $\Sigma\gamma_r$ è ridotta a integrali di Fourier, e il suo limite per $n = \infty$, quando t non è zero ed è fra $-2K$ e $2K$ ($\pm 2K$ escl.) è appunto uguale a $\mp\frac{1}{2}$ secondochè t è positivo o negativo.

Osservando poi che coi processi stessi del §. 119. si dimostra che l' integrale $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\theta(z)\, dz$ ha per limite zero per $n = \infty$, si conclude ora come volevamo che lo sviluppo (122) è possibile in quei casi stessi in cui lo è lo sviluppo (120) finchè α è fra 0 e 2 K (0 e 2 K escl.). Se poi $\alpha = 0$ o $\alpha = 2$ K, allora dai

valori di $\Sigma \gamma_r$ e di ξ e di ξ_1 si vede subito che lo stesso sviluppo (122) quando è applicabile ha respettivamente per somma $\frac{f(+0)-f(2K-0)}{2}$ e $\frac{f(2K-0)-f(+0)}{2}$, e così il teorema enunciato sopra resta completamente dimostrato.

E s'intende che, come per gli sviluppi particolari già considerati non si esclude neppure ora che fra 0 e 2 K la $f(x)$ divenga infinita in un gruppo finito o infinito di punti di prima specie, purchè resti atta alla integrazione anche ridotta ai valori assoluti §. 41. ec.

123. È poi da notare che per lo sviluppo (122) si ha:

$$\varphi(t\,,\alpha\,,h_n)=\frac{kk'}{\pi}\sum_0^{\infty}\frac{\mathrm{H}(\alpha+\lambda'_n)\,\mathrm{H}(\alpha+t-\lambda'_n)}{\Theta(\alpha)\,\Theta(\alpha+t)\,\Theta(\lambda'_n)\,\Theta''(\lambda'_n)},$$

e per α compreso fra 0 e 2 K e t diverso da zero e compreso fra $-\alpha$ e $2\,\mathrm{K}-\alpha$ ($-\alpha$ e $2\,\mathrm{K}-\alpha$ escl. quando $\alpha=2\mathrm{K}$ o $\alpha=0$) si ha:

$$\pm\frac{1}{2}=\frac{kk'}{\pi}\sum_0^{\infty}\frac{\mathrm{H}(\alpha+\lambda'_n)}{\Theta(\alpha)\,\Theta(\lambda'_n)\,\Theta''(\lambda'_n)}\int_0^t\frac{\mathrm{H}(\alpha+t-\lambda'_n)}{\Theta(\alpha+t)}\,dt,$$

ove nel primo membro deve prendersi il segno superiore o l'inferiore secondochè t è positivo o negativo.

Se poi $\alpha=0$ e $t=2$ K, o $\alpha=2$ K e $t=-2$ K, allora a causa del valore di $\Sigma\gamma_r$, nel primo membro di questa formola bisogna porre lo zero, e si ha quindi la relazione notevole:

$$\sum_1^{\infty}\frac{\mathrm{H}(\lambda'_n)}{\Theta(\lambda'_n)\,\Theta''(\lambda'_n)}\int_0^{2\mathrm{K}}\frac{\mathrm{H}(t-\lambda'_n)}{\Theta(t)}\,dt=0\,;$$

che lega fra loro le radici $\lambda'_0\,,\lambda'_1\,,\ldots,\lambda'_n\,,\ldots$

124. Prima di dare qualche applicazione degli ultimi sviluppi, dimostriamo due formole che servono al calcolo dei

coefficienti degli sviluppi medesimi in casi abbastanza notevoli.

Si supponga perciò che $f(z)$ e $f_1(z)$ siano funzioni monodrome e continue della variabile complessa z doppiamente periodiche, o almeno tali che per esse si abbia:

$$f(z+2\,\mathrm{K})=f(z)\,,\qquad f(z+2\,i\,\mathrm{K}')=p\,f(z)\,,$$
$$f_1(z+2\,\mathrm{K})=-f_1(z)\,,\quad f_1(z+2\,i\,\mathrm{K}')=p_1\,f_1(z)\,,$$

con p e p_1 costanti (*); e ammettendo che $f(z)$ e $f_1(z)$ non divengano infinite sull'asse delle x, si cerchi di calcolare gli integrali $\int_0^{2\mathrm{K}} f(x)\frac{\Theta(x-\lambda)}{\Theta(x-\mu)}\,dx,\int_0^{2\mathrm{K}} f_1(x)\frac{\mathrm{H}(x-\lambda)}{\Theta(x-\mu)}\,dx$ estesi alla porzione $(0\,,2\,\mathrm{K})$ dello stesso asse, nell'ipotesi che λ e μ siano quantità costanti, la seconda delle quali è reale o almeno non ha la sua parte immaginaria uguale a un multiplo dispari di $i\mathrm{K}'$.

Per questo si osservi che le funzioni $f(z)\frac{\Theta(z-\lambda)}{\Theta(z-\mu)}$, $f_1(z)\frac{\mathrm{H}(z-\lambda)}{\Theta(z-\mu)}$ a meno che non siano costanti, dovranno divenire infinite in uno o più punti (in numero finito) nel rettangolo $(2\,\mathrm{K}\,,2\,i\,\mathrm{K}')$; e se indichiamo con $a_1\,,a_2\,,\ldots,a_m$ i residui delle stesse funzioni pei punti d'infinito che cadono *nell'interno* di quel rettangolo, e con $b_1\,,b_2\,,\ldots,b_{m'}$ quelli corrispondenti ai punti d'infinito che cadessero sul lato che è sull'asse delle y, si avranno le formole seguenti:

$$\frac{1}{2\pi i}\int f(z)\,\frac{\Theta(z-\lambda)}{\Theta(z-\mu)}\,dz=\sum_1^m a_\nu+\sum_1^{m'} b_\nu\,,$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int f_1(z)\frac{\mathrm{H}(z-\lambda)}{\Theta(z-\mu)}\,dz=\sum_1^m a_\nu+\sum_1^{m'} b_\nu\,,$$

(*) Si ammette cioè che $f(z)$ e $f_1(z)$ siano particolari funzioni doppiamente periodiche di 2.ª specie.

nelle quali s'intende che l'integrazioni siano estese al contorno del rettangolo suindicato $(2\,\mathrm{K}, 2\,i\,\mathrm{K}')$ o a quello di un altro rettangolo che si ottiene da questo spostandolo tanto poco quanto si vuole nel senso dell'asse delle x, onde far sì che sul contorno non cadano punti d' infinito della funzione.

Ma negli integrali dei primi membri, le parti estese ai lati verticali si distruggono identicamente perchè nei punti di questi lati che si trovano su una parallela all' asse delle x i valori delle funzioni da integrarsi sono uguali, e i lati stessi sono percorsi in senso opposto; dunque le formole precedenti conducono subito alle altre:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\mathrm{K}} f(x)\frac{\Theta(x-\lambda)}{\Theta(x-\mu)}dx+\frac{1}{2\pi i}\int_{2\mathrm{K}}^0 f(x+2i\mathrm{K}')\frac{\Theta(x+2i\mathrm{K}'-\lambda)}{\Theta(x+2i\mathrm{K}'-\mu)}d\,x=\sum_1^m a_\nu+\sum_1^{m'} b_\nu;$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\mathrm{K}} f_1(x)\frac{\mathrm{H}(x-\lambda)}{\Theta(x-\mu}dx+\frac{1}{2\pi i}\int_{2\mathrm{K}}^0 f_1(x+2i\mathrm{K}')\frac{\mathrm{H}(x+2i\mathrm{K}'-\lambda)}{\Theta(x+2i\mathrm{K}'-\mu)}dx=\sum_1^m a_\nu+\sum_1^{m'} b_\nu,$$

e queste, per essere:

$$f(x+2\,i\mathrm{K}')=p\,f(x),\quad \frac{\Theta(x+2\,i\mathrm{K}'-\lambda)}{\Theta(x+2\,i\mathrm{K}'-\mu)}=\frac{\Theta(x-\lambda)}{\Theta(x-\mu)}\,e^{\frac{i\pi(\lambda-\mu)}{\mathrm{K}}},$$

$$f_1(x+2i\mathrm{K}')=p_1 f_1(x),\quad \frac{\mathrm{H}(x+2\,i\mathrm{K}'-\lambda)}{\Theta(x+2\,i\mathrm{K}'-\mu)}=\frac{\mathrm{H}(x-\lambda)}{\Theta(x-\mu)}\,e^{\frac{i\pi(\lambda-\mu)}{\mathrm{K}}},$$

ci danno le seguenti:

$$\frac{1-p\,e^{\frac{i\pi(\lambda-\mu)}{\mathrm{K}}}}{2\pi i}\int_0^{2\mathrm{K}} f(x)\frac{\Theta(x-\lambda)}{\Theta(x-\mu)}d\,x=\sum_1^m a_\nu+\sum_1^{m'} b_\nu,$$

$$\frac{1-p_1\,e^{\frac{i\pi(\lambda-\mu)}{\mathrm{K}}}}{2\pi i}\int_0^{2\mathrm{K}} f_1(x)\frac{\mathrm{H}(x-\lambda)}{\Theta(x-\mu)}d\,x=\sum_1^m a_\nu+\sum_1^{m'} b_\nu,$$

le quali, quando non sia $p\, e^{\frac{i\pi(\lambda-\mu)}{K}}=1$, o $p_1\, e^{\frac{i\pi(\lambda-\mu)}{K}}=1$, ci conducono subito alle altre notevoli:

$$
(123)\begin{cases}
\displaystyle\int_0^{2K} f(x)\frac{\Theta(x-\lambda)}{\Theta(x-\mu)}\,dx=\frac{2\pi i}{1-p\,e^{\frac{i\pi(\lambda-\mu)}{K}}}\left\{\sum_1^m a_\nu+\sum_1^{m'} b_\nu\right\}, \\[2ex]
\displaystyle\int_0^{2K} f_1(x)\frac{H(x-\lambda)}{\Theta(x-\mu)}\,dx=\frac{2\pi i}{1-p_1\,e^{\frac{i\pi(\lambda-\mu)}{K}}}\left\{\sum_1^m a_\nu+\sum_1^{m'} b_\nu\right\},
\end{cases}
$$

che sono appunto quelle che volevamo trovare.

Se poi fòsse $p\, e^{\frac{i\pi(\lambda-\mu)}{K}}=1$, o $p_1\, e^{\frac{i\pi(\lambda-\mu)}{K}}=1$, allora colle regole note invece di queste formole si hanno di quì le altre:

$$
(124)\begin{cases}
\displaystyle\int_0^{2K} f(x)\frac{\Theta(x-\lambda)}{\Theta(x-\mu)}\,dx=-2K\frac{d}{d\lambda}\left\{\sum_1^m a_\nu+\sum_1^{m'} b_\nu\right\}, \\[2ex]
\displaystyle\int_0^{2K} f_1(x)\frac{H(x-\lambda)}{\Theta(x-\mu)}\,dx=-2K\frac{d}{d\lambda}\left\{\sum_1^m a_\nu+\sum_1^{m'} b_\nu\right\} \ (^*).
\end{cases}
$$

(*) In generale se $w(z)$ è una funzione di z monodroma continua e periodica per la quale si ha:

$$w(z+2K)=w(z), \qquad w(z+2iK')=\mu\, w(z),$$

con μ costante diversa da uno, e sull'asse delle quantità reali questa funzione è sempre finita, si avrà la formola:

$$\int_0^{2K} w(x)\,dx=\frac{2\pi i}{1-\mu}\left\{\sum_1^m a_\nu+\sum_1^{m'} b_\nu\right\},$$

essendo a_ν e b_ν i residui di $w(z)$ corrispondenti ai punti d'infinito che cadono respettivamente nell'interno del rettangolo $(2K, 2iK')$ e sul lato $x=0$ di questo rettangolo.

125. In particolare dunque supponendo $\mu=0$, e ammettendo dapprima che $f(z)$ o $f_1(z)$ divengano infinite del prim'ordine coi residui $a_1, a_2, \ldots, a_m$ soltanto nei punti $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ *interni* al rettangolo $(2K, 2iK')$, basta osservare che $\frac{1}{\Theta(z)}$ diviene infinita per $z=iK'$ col residuo $\frac{1}{\Theta'(iK')}=-iq^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{\pi}{2kk'K}}$ ove $q=e^{-\frac{\pi K'}{K}}$, per dedurne subito, che se non è $pe^{\frac{i\pi\lambda}{K}}=1$, o $p_1 e^{\frac{i\pi\lambda}{K}}=1$, colle attuali ipotesi rispetto a $f(z)$ o $f_1(z)$ si hanno le formole:

$$(125)\begin{cases}\displaystyle\int_0^{2K} f(x)\frac{\Theta(x-\lambda)}{\Theta(x)}dx=\frac{2\pi i}{1-pe^{\frac{i\pi\lambda}{K}}}\left\{\sum_1^m a_\nu\frac{\Theta(\beta_\nu-\lambda)}{\Theta(\beta_\nu)}-iq^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{\pi}{2kk'K}}f(iK')\Theta(iK-\lambda)\right\},\\[2ex] \displaystyle\int_0^{2K} f_1(x)\frac{H(x-\lambda)}{\Theta(x)}dx=\frac{2\pi i}{1-p_1 e^{\frac{i\pi\lambda}{K}}}\left\{\sum_1^m a_\nu\frac{H(\beta_\nu-\lambda)}{\Theta(\beta_\nu)}-iq^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{\pi}{2kk'K}}f_1(i\Theta')H(i\Theta'-\lambda)\right\}\end{cases}$$

che per essere:

E se $w(z)$ contiene un altra variabile λ, rispetto alla quale è pure monodroma e continua cc., e per un valore particolare λ_0 di questa variabile si ha $\mu=1$, allora sarà:

$$\int_0^{2K} w(x, \lambda_0)=\frac{2\pi i}{-\mu'}\left(\sum_1^m a'_\nu+\sum_1^{m'} b'_\nu\right),$$

gli apici indicando le derivate prese rispetto a λ per $\lambda=\lambda_0$.

Queste osservazioni potrebbero utilizzarsi anche per trovare nuovi sviluppi, poichè per esse, posta la forma dello sviluppo, si possono determinare i coefficienti, per fare dopo le relative verificazioni coll'applicare i metodi generali che quì abbiamo dati.

$$\Theta(iK'-\lambda) = -i\,q^{-\frac{1}{4}}\, e^{\frac{i\pi\lambda}{2K}} H(\lambda)\,, \quad H(iK'-\lambda) = i\,q^{-\frac{1}{4}}\, e^{\frac{i\pi\lambda}{2K}}\Theta(\lambda)\,,$$

danno luogo anche alle altre:

$$126)\ \begin{cases} \displaystyle\int_0^{2K} f(x)\frac{\Theta(x-\lambda)}{\Theta(x)}dx = \frac{2\pi i}{1-p\, e^{\frac{i\pi\lambda}{K}}}\left\{\sum_1^m a_\nu \frac{\Theta(\beta_\nu-\lambda)}{\Theta(\beta_\nu)} - \sqrt{\frac{\pi}{2kk'K}}\, e^{\frac{i\pi\lambda}{2K}} f(iK')H(\lambda)\right\}, \\ \displaystyle\int_0^{2K} f_1(x)\frac{H(x-\lambda)}{\Theta(x)}dx = \frac{2\pi i}{1-p_1\, e^{\frac{i\pi\lambda}{K}}}\left\{\sum_1^m a_\nu \frac{H(\beta_\nu-\lambda)}{\Theta(\beta_\nu)} + \sqrt{\frac{\pi}{2kk'\Theta}}\, e^{\frac{i\pi\lambda}{2\Theta}} f_1(i\Theta')\Theta(\lambda)\right\}, \end{cases}$$

la prima delle quali quando $f(x)=1$ ci dà la seguente:

$$127)\quad \int_0^{2K}\frac{\Theta(x-\lambda)}{\Theta(x)}dx = -\frac{2\pi i}{1-e^{\frac{\pi i\lambda}{K}}}\sqrt{\frac{\pi}{2kk'K}}\, e^{\frac{i\pi\lambda}{2K}} H(\lambda) = \pi\sqrt{\frac{\pi}{2kk'K}}\,\frac{H(\lambda)}{\operatorname{sen}\frac{\pi\lambda}{2K}},$$

e la seconda quando $f_1(z) = e^{\frac{i\pi z}{2K}}$, e quindi $p_1 = q$, dà luogo all' altra:

$$128)\quad \int_0^{2K} e^{\frac{i\pi x}{2K}}\frac{H(x-\lambda)}{\Theta(x)}d\,x = \frac{2\pi i\sqrt{q}}{1-q\, e^{\frac{\pi i\lambda}{K}}}\sqrt{\frac{\pi}{2kk'K}}\, e^{\frac{i\pi\lambda}{K}}\Theta(\lambda)\,.$$

che facendovi $\lambda=0$, e osservando che $\operatorname{sn} z = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{H(z)}{\Theta(z)}$,

e $\Theta(0) = \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}$, ci dà:

$$\int_0^{2K} e^{\frac{i\pi x}{2K}} \operatorname{sn} x\, d\,x = \frac{2\pi i\sqrt{q}}{k\,(1-q)},$$

ovvero

$$(129)\quad \int_0^{2K} \cos\frac{\pi x}{2K}\,\mathrm{sn}\,x\,dx = 0\,,\quad \int_0^{2K} \mathrm{sen}\,\frac{\pi\pi}{2K}\,\mathrm{sn}\,x\,dx = \frac{2\pi\sqrt{q}}{k(1-q)}$$

126. Supponendo invece che $f(z)$ o $f_1(z)$ divengano infinite per $z=i\mathrm{K}'$ e non lo divengano in nessun altro punto nell'interno del solito rettangolo nè sul lato $x=0$, e non sia $p\,e^{\frac{i\pi\lambda}{K}}=1$, o $p_1\,e^{\frac{i\pi\lambda}{K}}=1$, si avranno le formole seguenti:

$$(130)\quad \int_0^{2K} f(x)\frac{\Theta(x-\lambda)}{\Theta(x)}dx = \frac{2\pi i b}{1-p\,e^{\frac{i\pi\lambda}{K}}},\quad \int_0^{2K} f(x)\,\frac{\mathrm{H}(x-\lambda)}{\Theta(x)}\,dx = \frac{2\pi i b_1}{1-p_1\,e^{\frac{i\pi\lambda}{K}}},$$

essendo b e b_1 i residui delle funzioni $\frac{f(z)\,\Theta(z-\lambda)}{\Theta(z)}$, $f_1(z)\frac{\mathrm{H}(z-\lambda)}{\Theta(z)}$ per $z=i\mathrm{K}'$; e di quì in particolare prendendo per es. $f(z)=\frac{\Theta(z-\mu)}{\Theta(z)}$, $f(z)=\frac{\Theta'(z-\mu)}{\Theta(z-\mu)}$ o $f(z)=\mathrm{sn}^2 z$, $f(z)=\mathrm{dn}\,z,\ldots$, $f_1(z)=\frac{\mathrm{H}(z-\mu)}{\Theta(z)}$, $f_1(z)=\frac{\mathrm{H}'(z-\mu)}{\Theta(z-\mu)}$, $f_1(z)=\mathrm{sn}\,z$, $f_1(z)=\mathrm{cn}\,z,\ldots$ si hanno altre formole notevolissime nelle quali b e b_1 possono determinarsi colle formole del §. 62. E s' intende al solito che se sarà $p\,e^{\frac{i\pi\lambda}{K}}=1$, o $p_1\,e^{\frac{i\pi\lambda}{K}}=1$, ai quozienti dei corrispondenti secondi membri basterà sostituire i quozienti delle derivate prese rispetto a λ.

127. Trovate ora queste formole, si vede subito che cambiandovi λ in $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n, \ldots$ o in $\lambda'_0, \lambda'_1, \lambda'_2, \ldots$ si ottengono i coefficienti degli sviluppi (121) o (122) corrispondenti alle attuali funzioni $f(x)$, o $f_1(x)$, e questi sviluppi valgono evidentemente per tutti i valori reali di x; talchè si può ora affermare che:

1.° „ Quando è data una funzione periodica e finita $f(x)$
„ della variabile reale x col periodo 2K, se si troverà che
„ questa funzione considerata anche pei valori complessi di z
„ è monodroma e continua e doppiamente periodica coi perio-
„ di 2 K e 2 i K', o almeno è tale che per essa si abbia:

$$f(z+2\mathrm{K})=f(z)\,,\quad f(z+2\,i\,\mathrm{K}')=p\,f(z)$$

„ con p costante, allora indicando con $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \ldots$ le solite
„ radici della equazione $\mathrm{H}'(z)=0$, e con $a_{\nu,n}$ e $b_{\nu,n}$ i residui
„ della funzione $f(z)\dfrac{\Theta(z-\lambda_n)}{\Theta(z)}$ corrispondenti ai punti d' infinito
„ che cadono respettivamente nell' interno del rettangolo
„ (2 K, 2 i K') e sul lato $x=0$ di questo rettangolo, si avrà
„ la formola seguente:

$$(131)\left\{\begin{array}{l} f(x)=2ik'\displaystyle\sum_0^\infty \frac{\Theta(x+\lambda_n)}{\Theta(x)\Theta^2(\lambda_n)(1-\zeta\mathrm{sn}^2\lambda_n)}\,\frac{\displaystyle\sum_1^m a_{\nu,n}+\sum_1^{m'} b_{\nu,n}}{1-p\,e^{\frac{i\pi\lambda_n}{\mathrm{K}}}}, \\ \text{o:} \\ f(x)=-\,2\,i\,kk'\displaystyle\sum_0^\infty \frac{\Theta(x+\lambda_n)}{\Theta(x)\,\mathrm{H}(\lambda)\,\mathrm{H}''(\lambda_n)}\,\frac{\displaystyle\sum_1^m a_{\nu,n}+\sum_1^{m'} b_{\nu,n}}{1-p\,e^{\frac{i\pi\lambda_n}{\mathrm{K}}}} \end{array}\right.$$

„ che varrà per tutti i valori reali di x, supposto ben inteso
„ che se per alcune radici λ_n si avesse $p\,e^{\frac{i\pi\lambda_n}{\mathrm{K}}}=1$, allora nel
„ termine corrispondente, al quoziente $\dfrac{\sum_1^m a_{\nu,n}+\sum_1^{m'} b_{\nu,n}}{1-p\,e^{\frac{i\pi\lambda_n}{\mathrm{K}}}}$ biso-

„ gnerebbe sostituire il quoziente delle derivate rispetto a λ,

„ cioè $-\frac{K}{i\pi\lambda_n}\left\{\sum_1^m a'_{\nu,n}+\sum_1^{m'} b'_{\nu,n}\right\}$.

„ 2.° Quando è data una funzione periodica e finita $f_1(x)$
„ della variabile reale x, se si troverà che questa funzione
„ considerata anche pei valori complessi di z è monodroma
„ e continua e tale che si abbia:

$$f_1(z+2\,K)=-f_1(z)\quad,\quad f_1(z+2\,i\,K')=p_1 f_1(z),$$

„ con p_1 costante, allora indicando con $\lambda'_0, \lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_n, \ldots$
„ le solite radici della equazione $\Theta'(z)=0$, e con $a_{\nu,n}$, e $b_{\nu,n}$
„ i residui della funzione $f_1(z)\frac{H(z+\lambda'_n)}{\Theta(z)}$ corrispondenti ai
„ punti d'infinito di questa funzione che cadono rispettiva-
„ mente nell'interno del rettangolo $(2\,K, 2\,i\,K')$ e sul lato
„ $x=0$, si avrà la formola seguente:

$$(132)\qquad f_1(x)=\,2\,i\,kk'\sum_0^\infty \frac{H(x+\lambda'_n)}{\Theta(x)\,\Theta(\lambda'_n)\,\Theta''(\lambda'_n)}\;\frac{\sum_1^m a_{\nu,n}+\sum_1^{m'} b_{\nu,n}}{1-p_1\,e^{\frac{i\pi\lambda'_n}{K}}}$$

„ che varrà per tutti i valori reali di x, colla solita avver-
„ tenza per quei termini pei quali fosse $p_1\,e^{\frac{i\pi\lambda'_n}{K}}=1$.

128. E nel caso particolare in cui $f(z)$ o $f_1(z)$ non divengano infinite sul contorno del nostro rettangolo, ma lo divengano soltanto nell' interno e del prim' ordine nei punti $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m$ coi residui $a_1, a_2, \ldots a_m$, allora per tutti i valori reali di x si avranno le formole seguenti:

$$(133)\quad f(x) = -2ikk' \sum_{0}^{\infty} \frac{\Theta(x+\lambda_n)}{\Theta(x)\, \mathrm{H}(\lambda_n)\, \mathrm{H}''(\lambda_n)} \frac{1}{1 - p\, e^{\frac{i\pi\lambda_n}{\mathrm{K}}}} \left\{ \sum_{1}^{m} a_\nu \frac{\Theta(\beta_\nu - \lambda_n)}{\Theta(\beta_\nu)} - \right.$$

$$\left. - \sqrt{\frac{\pi}{2kk'\mathrm{K}}}\; e^{\frac{i\pi\lambda_n}{2\mathrm{K}}} f(i\,\mathrm{K}')\, \mathrm{H}(\lambda_n) \right\},$$

$$(134)\quad f_1(x) = 2ikk' \sum_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{H}(x+\lambda'_n)}{\Theta(x)\Theta(\lambda'_n)\, \Theta''(\lambda'_n)} \frac{1}{1 - p_1\, e^{\frac{i\pi\lambda'_n}{\mathrm{K}}}} \left\{ \sum_{1}^{m} a_\nu \frac{\mathrm{H}(\beta_\nu - \lambda'_n)}{\Theta(\beta_\nu)} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{\pi}{2\,kk'\mathrm{K}}}\; e^{\frac{i\pi\lambda'_n}{2\mathrm{K}}} f_1(i\,\mathrm{K}')\, \Theta(\lambda'_n) \right\},$$

la prima delle quali per $f(x)=1$ dà luogo all' altra notevolissima:

$$\Theta(x) = -\, i \sqrt{\frac{2\pi kk'}{\mathrm{K}}} \sum_{0}^{\infty} \frac{\Theta(x+\lambda_n)}{\mathrm{H}''(\lambda_n)} \frac{e^{\frac{\pi i\lambda_n}{2\mathrm{K}}}}{1 - e^{\frac{\pi i\lambda_n}{\mathrm{K}}}},$$

ovvero:

$$(135)\qquad \Theta(x) = \sqrt{\frac{\pi kk'}{2\mathrm{K}}} \sum_{0}^{\infty} \frac{\Theta(x+\lambda_n)}{\mathrm{H}''(\lambda_n)\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi\lambda_n}{2\mathrm{K}}}$$

che dà uno sviluppo particolare di $\Theta(x)$ che vale per tutti i valori reali di x.

Similmente la (134) per $f_1(x) = e^{\frac{\pi i x}{2\mathrm{K}}}$ ci dà la seguente:

$$(136)\qquad \Theta(x)=-\sqrt{\frac{\pi k k'}{2K}}\, e^{-\frac{\pi i x}{2K}} \sum_0^\infty \frac{H(x+\lambda'_n)}{\Theta''(\lambda'_n)\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi(\lambda'_n+iK')}{2K}},$$

che dà un nuovo sviluppo di $\Theta(x)$ per tutti i valori reali di x.

129. Invece se $f(z)$ o $f_1(z)$ divengono infinite per $z=iK'$ senza divenirlo in altri punti nè dell'interno nè del lato $x=0$ del solito rettangolo $(2K, 2iK')$, allora per la corrispondente $f(x)$ o $f_1(x)$ si avranno gli sviluppi seguenti:

$$(137)\qquad \left\{ \begin{aligned} f(x) &= -2ikk' \sum_0^\infty \frac{\Theta(x+\lambda_n)}{\Theta(x)\,H(\lambda_n)\,H(\lambda_n)} \frac{b_n}{1-p\,e^{\frac{i\pi}{K}\lambda_n}}, \\ f_1(x) &= 2\,ikk' \sum_0^\infty \frac{H(x+\lambda'_n)}{\Theta(x)\,\Theta(\lambda'_n)\,\Theta''(\lambda'_n} \frac{b'_n}{1-p_1\,e^{\frac{ip\lambda'_n}{K}}} \end{aligned} \right.$$

essendo b_n e b'_n i residui di $f(z)\frac{\Theta(z-\lambda_n)}{\Theta(z)}$ e $f_1(z)\frac{H(z-\lambda'_n)}{\Theta(z)}$ per $z=iK'$, e coll'avvertenza fatta sopra pel caso in cui sia $p\,e^{\frac{i\pi\lambda_n}{K}}=1$, o $p_1\,e^{\frac{i\pi\lambda'_n}{K}}=1$.

È da notare che cambiando in tutte queste formole $f(x)$ e $f_1(x)$ in $\frac{f(x)}{\Theta(x)}$ e $\frac{f_1(x)}{\Theta(x)}$, si può fare sparire il divisore $\Theta(x)$ che figura nei varii termini delle nostre serie, le quali vengono così ordinate per funzioni $\Theta(x+\lambda_n)$, e $H(x+\lambda'_n)$.

Queste formole poi, con prendere $f(z)=\frac{\Theta(z-\mu)}{\Theta(z)}$, $f(z)=\mathrm{sn}^2 z$, $f(z)=\mathrm{dn}z, f(z)=\frac{\Theta'(z-\mu)}{\Theta(z)},\ldots$, o $f_1(z)=\frac{H(z-\mu)}{\Theta(z)}$, $f_1(z)=\mathrm{sn}z$, $f_1(z)=\mathrm{cn}\,z$, $f_1(z)=\frac{H'(z-\mu)}{\Theta(z)},\ldots$, con μ costante, danno

nuovi sviluppi notevoli di $\Theta(x-\mu)$, $\mathrm{sn}^2 x$, $\mathrm{dn}\, x$, $\Theta'(x-\mu)$, .. $\mathrm{H}(x-\mu)$, $\mathrm{sn}\, x$, $\mathrm{cn}\, x$, $\mathrm{H}'(x-\mu)$, ..., per tutti i valori reali di x ec.; e questi sviluppi, che risultano così come applicazioni dei teoremi che precedono, possono riguardarsi come altrettante formole della teorica delle funzioni ellittiche (*).

130. Non faremo altre applicazioni dei processi generali che abbiamo dati in questo capitolo, perocchè quelle che abbiamo fatto ci sembrano sufficienti a mostrare l' utilità dei processi medesimi, e il modo di valersene.

Faremo invece alcune altre considerazioni generali incominciando dall' osservare che trovato uno sviluppo di una funzione $f(x)$ coi processi quì indicati, se ne potranno avere infiniti altri simili cambiando la funzione $\varphi(t,\alpha,h_n)$ che vi figura in un altra $\psi(t,\alpha)\,\varphi(t,\alpha,h_n)$, essendo $\psi(t,\alpha)$ una funzione che per $t=0$ si riduca all' unità qualunque sia α, e che, oltre esser finita pei varii valori che si considerano di t e di α, goda della proprietà che riguardata come funzione di t sia atta alla integrazione per ogni valore speciale di α, e soddisfi a una delle condizioni che si richiedono per potere assicurare che con t diverso da zero e comunque piccolo si ha:

$$\lim_{n=\infty}\int_0^t \psi(t,\alpha)\,\varphi(t,\alpha,h_n)dt=\lim_{n=\infty}\int_0^t \varphi(t,\alpha,h_n)\,dt\,;$$

come ad es. questa funzione $\psi(t,\alpha)$ considerata come funzione di t, per ogni valore speciale di α, non venga ad avere nell'intorno di $t=0$ altro che un numero finito di massimi e di minimi.

(*) Era già stampato il foglio precedente quando ho ricevuto una lettera gentilissima del Sig. Hermite nella quale mi annunzia che Egli aveva trovato la forma degli sviluppi precedenti, ma senza avere una dimostrazione rigorosa della loro possibilità. Però anche l' avere trovato soltanto la detta forma (che come già ho detto nella nota alla pag. 283 a me fu fatta conoscere pel caso dello sviluppo (110) dal sig. Mittag-Leffler) costituisce un passo importantissimo nella teoria degli attuali sviluppi. Aggiungerò che nella lettera quì indicata, che io mi riservo di comunicare alla Direzione degli Annali di matematica di Milano per la sua pubblicazione, il Sig. Hermite giunge Egli pure per altra via a formole analoghe a quelle che io ho dato nei paragrafi precedenti, e ottiene altri risultati notevolissimi.

Supposto infatti che $\psi(t,\alpha)$ soddisfi a queste condizioni, si vede subito (§. 39) che se lo sviluppo (1) del §. 53 è applicabile alla funzione $f(x)$ nel punto α, le sarà pure applicabile l'altro sviluppo:

$$\frac{1}{2G}\int_a^b f(x)\psi(x-\alpha,\alpha)\varphi(x-\alpha,\alpha,h_0)dx+$$

$$+\frac{1}{2G}\sum_1^\infty\int_a^b f(x)\psi(x-\alpha,\alpha)\left\{\varphi(x-\alpha,\alpha,h_n)-\varphi(x-\alpha,\alpha,h_{n-1})\right\}dx;$$

e così pure se a $f(x)$ nel punto α sarà applicabile lo sviluppo (3) del §. 56 cioè:

$$\frac{1}{2G}\int_a^b f(x)\varphi(x-\alpha,\alpha,h_0)dx+\frac{1}{2G}\sum_1^\infty{}_n\sum_1^m{}_s P_{n,s}H_{n,s}(\alpha),$$

ove le $P_{n,s}$ sono quantità costanti determinate dalla formola:

$$P_{n,s}=\int_a^b f(x)K_{n,s}(x)dx,$$

lo stesso sviluppo sarà applicabile anche quando il $\varphi(x-\alpha,\alpha,h_0)$ si muti in $\psi(x-\alpha,\alpha)\varphi(x-\alpha,\alpha,h_0)$, e le quantità $P_{n,s}$, senza essere più costanti, vengano invece determinate dalla formola:

$$P_{n,s}=\int_a^b f(x)\psi(x-\alpha,\alpha)K_{n,s}(x)dx;$$

e più particolarmente ancora, se sarà applicabile a $f(x)$ pel punto α lo sviluppo (15) del §. 60 cioè:

$$\frac{1}{2G}\int_a^b f(x)\varphi(x-\alpha,\alpha,h_0)dx+\frac{1}{2G}\sum_1^\infty{}_n\sum_1^m{}_s P_{n,s}H_s(\lambda_n,\alpha),$$

ove:

$$P_{n,s}=p_{n,s}\int_a^b f(x)F(x)H_s(\lambda_n,x)dx,$$

e le $p_{n,s}$ sono costanti determinate, lo stesso sviluppo resterà applicabile anche quando sia:

$$P_{n,s}=p_{n,s}\int_a^b f(x)F(x)\psi(x-\alpha,\alpha)H_s(\lambda_n,x)dx,$$

e il $\varphi(x-\alpha\,,\alpha\,,h_0)$ sia cangiato in $\psi(x\,,\alpha)\,\varphi(x-\alpha\,,\alpha\,,h_0)$.

131. S' intende come questa osservazione possa condurre a infiniti sviluppi differenti che, per quanto si disse nel §. 39, valgono negli stessi casi di quello da cui si parte, e possono talvolta valere anche in casi più generali.

Così ad es. partendo dagli sviluppi di Fourier si giunge a infiniti altri sviluppi della forma:

$$\frac{1}{2}\,a_0+\sum_1^\infty(a_n\cos n\alpha+b_n\,\mathrm{sen}\,n\alpha),$$

ove le a_n, b_n non sono più costanti, e sono date dalle formole:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\psi(x-\alpha,\alpha)\cos n\,x\,dx,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\psi(x-\alpha,\alpha)\mathrm{sen}\,n\,x\,dx;$$

e così in particolare si giunge agli sviluppi nei quali si ha:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,e^{\,\mathrm{sen}\,(x-\alpha)}\cos nxdx,\ \ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,e^{\mathrm{sen}\,(x-\alpha)}\mathrm{sen}\,nxdx,$$

e a quelli nei quali:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)X_p(1+x-\alpha)\cos nx dx,\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)X_p(1+x-\alpha)\operatorname{sen} nx dx,$$

ove X_p è una delle note funzioni di Legendre, ec. . .

132. Aggiungiamo che, se per es. $a>b$, e $\psi(x)$ è una funzione che prende i valori a e b per $x=a_1$ e $x=b_1$, e da a_1 a b_1 è finita e continua e non è decrescente, e ammette una derivata determinata e finita e atta alla integrazione fra a_1 e b_1, dopo di avere trovato uno sviluppo di una funzione $f(x)$ fra a e b, come ad es. lo sviluppo generale (1) del §. 53, cioè:

$$(138)\quad \frac{1}{2G}\int_a^b f(x)\varphi(x-\alpha,\alpha,h_0)dx+\frac{1}{2G}\sum_1^\infty\int_a^b f(x)\{\varphi(x-\alpha,\alpha,h_n)-\varphi(x-\alpha,\alpha,h_{n-1}\}dx$$

cambiandovi α in $\psi(\alpha)$ si otterrà una serie che rappresenterà $f[\psi(\alpha)]$ pei soliti valori di α fra a_1 e b_1 pei quali $f[\psi(\alpha)]$, considerandovi $\psi(\alpha)$ come variabile, viene a soddisfare alle solite condizioni ec. E cambiando poi anche x in $\psi(x)$, e $f[\psi(x)]$ in $f(x)$, si otterrà lo sviluppo seguente:

$$\frac{1}{2G}\int_{a_1}^{b_1} f(x)\,\psi'(x)\,\varphi[\psi(x)-\psi(\alpha)\,,\ \psi(\alpha)\,,\ h_0]\,d\,x\,+$$

$$+\frac{1}{2G}\sum_0^\infty\int_{a_1}^{b_1} f(x)\psi'(x)\{\varphi[\psi(x)-\psi(\alpha),\psi(\alpha),h_n)-\varphi[\psi(x)-\psi(\alpha),\psi(\alpha),h_{n-1}]\}\,dx,$$

che sarà ordinariamente differente dallo sviluppo (138) dal quale siamo partiti, e rappresenterà $f(\alpha)$ nei soliti punti α fra a_1 e b_1 negli intorni dei quali la funzione $f(x)$ non fà oscillazioni, o soddisfa a una delle altre condizioni che si trovarono in generale, notando però che alcune di queste ultime condizioni verranno ora leggermente modificate, dovendo esse riportarsi all' antica funzione $f[\psi(x)]$, ec.; di modo che per es. le condizioni rispetto alla derivata dell'antica funzione $f[\psi(x)]$,

verranno ora relative a $\frac{f'(x)}{\psi'(x)}$, e quindi esse resteranno ancora relative a $f'(x)$ semplicemente, quando fra a_1 e b_1 la $\psi'(x)$ sia sempre diversa da zero, ec.

133. Così, in particolare, partendo dagli sviluppi:

$$\frac{1}{2G}\int_a^b f(x)\,\varphi(x-\alpha\,,\alpha\,,h_0)\,d\,x+\frac{1}{2G}\sum_1^\infty{}_n\sum_1^m{}_s \mathrm{P}_{n,s}\,\mathrm{H}_{n,s}(\alpha)\,,$$

$$\frac{1}{2G}\int_a^b f(x)\,\varphi(x-\alpha\,,\alpha\,,h_0)\,d\,x+\frac{1}{2G}\sum_1^\infty{}_n\sum_1^m{}_s \mathrm{P}_{n,s}\,\mathrm{H}_s(\lambda_n\,,\alpha)\,,$$

ove si ha respettivamente:

$$\mathrm{P}_{n,s}=\int_a^b f(x)\,\mathrm{K}_{n,s}(x)\,d\,x\,,\ \ \mathrm{o}\ \ \mathrm{P}_{n,s}=p_{n,s}\int_a^b f(x)\,\mathrm{F}(x)\,\mathrm{H}_s(\lambda_n\,,x)\,d\,x\,,$$

con $p_{n,s}$ quantità costanti determinate, dietro l' osservazione fatta ora se ne dedurranno gli altri sviluppi:

$$\frac{1}{2G}\int_{a_1}^{b_1} f(x)\psi'(x)\varphi[\psi(x)-\psi(\alpha),\psi(\alpha),h_0]dx+\frac{1}{2G}\sum_1^\infty\sum_1^m \mathrm{P}_{n,s}\,\mathrm{H}_{n,s}\,[\psi(\alpha)]\,,$$

$$\frac{1}{2G}\int_{a_1}^{b_1} f(x)\psi'(x)\varphi[\psi(x)-\psi(\alpha),\,\psi(\alpha)\,,h_0]\,dx+\frac{1}{2G}\sum_1^\infty{}_n\sum_1^m{}_s \mathrm{P}_{n,s}\,\mathrm{H}_s[\lambda_n,\,\psi(\alpha)],$$

ove si ha respettivamente:

$$\mathrm{P}_{n,s}=\int_{a_1}^{b_1} f(x)\,\psi'(x)\,\mathrm{K}_{n,s}[\psi(x)]\,d\,x\,,$$

o:

$$\mathrm{P}_{n,s}=p_{n,s}\int_{a_1}^{b_1} f(x)\,\psi'(x)\,\mathrm{F}[\psi(x)]\,\mathrm{H}_s[\lambda_n\,,\psi(x)]\,d\,x\,,$$

essendo $p_{n,s}$ le costanti precedenti, e questi sviluppi rappresenteranno $f(x)$ nei soliti punti α fra a_1 e b_1, ec.

134. Più particolarmente ancora, partendo dallo sviluppo di Fourier:

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_1^\infty(a_n\cos nx+b_n\operatorname{sen}nx),$$

ove:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\,,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\operatorname{sen}nx\,dx\,,$$

si ottiene l'altro:

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_1^\infty[a_n\cos n\psi(x)+b_n\operatorname{sen}n\psi(x)]\,,$$

ove:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}f(x)\psi'(x)\cos[n\psi(x)]dx,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}f(x)\,\psi'(x)\operatorname{sen}[n\psi(x)]dx,$$

con $\psi(a_1)=-\pi$, $\psi(b_1)=\pi$, ec. talchè se si prende per es. $\psi(x)=\operatorname{am}x$, osservando che colle solite notazioni della teorica delle funzioni ellittiche si ha $a_1=-2K$, $b_1=2K$, $\psi'(x)=\operatorname{dn}x$, si giunge al seguente sviluppo:

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_1^\infty[a_n\cos(n\operatorname{am}x)+b_n\operatorname{sen}(n\operatorname{am}x)]$$

ove:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-2K}^{2K}f(x)\operatorname{dn}x\cos(n\operatorname{am}x)dx,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-2K}^{2K}f(x)\operatorname{dn}x\operatorname{sen}(n\operatorname{am}x)\,dx\quad,$$

che è lo sviluppo cui mi accenna il sig. Hermite nella lettera citata in nota alla pag. 305; e siccome fra $-2K$ e $2K$ la $\operatorname{dn}x$ è sempre diversa da zero, questo sviluppo varrà per tutti i

punti α fra $-2K$ e $2K$ nell'intorno dei quali $f(x)$ non fà oscillazioni, o ha una derivata che resta atta alla integrazione anche ridotta ai valori assoluti, ec.

Nuovi sviluppi si otterrebbero al modo stesso dagli altri sviluppi particolari per funzioni di Bessel, sferiche, e Jacobiane che abbiamo date nei paragrafi precedenti.

135. Oltre a questo osserviamo che in tutti gli sviluppi precedenti, gli integrali che figurano nei singoli termini erano estesi all'intiero intervallo (a, b) nel quale la funzione $f(x)$ da svilupparsi era data, e questo intervallo dipende dalla natura dello sviluppo.

Quando però invece dell' intiero intervallo (a, b) se ne consideri soltanto una parte (a', b') per modo che sia $a \leq a' < b' \leq b$, allora, sia valendosi degli antichi sviluppi, con prendere arbitrariamente la $f(x)$ fra a' e b' e prenderla uguale a zero nelle porzioni rimanenti di (a, b), sia valendosi delle considerazioni generali, si vede subito che si potranno fare dei nuovi sviluppi che differiscano dagli antichi in quanto gli integrali che in essi figurano invece di a e b abbiano per limiti a' e b'; e questi nuovi sviluppi varranno ancora, come gli antichi, per tutti i valori di x fra a' e b' pei quali saranno soddisfatte le solite condizioni; con questa sola differenza che nel nuovo estremo a', quando questo punto sia fra quelli da considerarsi e sia interno all' antico intervallo (a, b), i nuovi sviluppi avranno per somma $\frac{1}{2} f(a'+0)$, e nell' estremo b', se anche questo è interno all'antico intervallo (a, b) ed è fra quelli da considerarsi, essi avranno per somma $\frac{1}{2} f(b'-0)$; ec.

Così per es. negli svilpppi di Fourier gli integrali che figurano nei coefficienti a_n e b_n potranno estendersi fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, e allora gli sviluppi corrispondenti varranno soltanto nell'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$; gli integrali che figurano nei coefficienti degli sviluppi per funzioni P_ν o per funzioni di Bessel I_ν

potranno estendersi per es. fra 0 e $\frac{1}{2}$ o fra $\frac{1}{2}$ e 1 e allora gli sviluppi corrispondenti varranno soltanto pei nuovi intervalli $\left(0, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, ec.

136. Facciamo anche le seguenti osservazioni generali.

Notiamo cioè che in tutti i casi da noi considerati la riuscita dei metodi precedenti dipende dalla circostanza che le difficoltà inerenti alla ricerca della possibilità di un dato sviluppo vengono con quei metodi decomposte in due; l'una relativa soltanto alla natura dello sviluppo, e l'altra relativa alla funzione da svilupparsi.

Alla seconda difficoltà, dopo di avere superato la prima, si risponde colla applicazione dei teoremi generali del Cap. III.; la prima poi viene sempre ridotta all'esame di una serie che deve rappresentare il limite dell'integrale $\int_0^t \varphi(t, \alpha, h_n)\, dt$ corrispondente a quello sviluppo, e all'esame della somma S_n dei primi n termini di questa serie e della derivata S'_n di questa somma: e, fondandosi sulla teorica dei residui, l'esame della detta serie e delle somme S_n e S'_n viene ridotto a quello di una differenza nella quale figura un integrale esteso a un certo contorno, ec.

137. Ora è degno di nota che, mentre nei §§. 64 e seg., una tale riduzione l'abbiamo fatta introducendo in calcolo la funzione $w(z)$ di cui erano infiniti le quantità $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n, \ldots$ potremo sempre però introdurre in calcolo anche altre funzioni; poichè, quando per es. si conosca una funzione monodroma e continua $W(z)$ che per valori di z presi ad arbitrio $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ divenga infinita del prim' ordine e abbia per residui i termini della serie sopra indicata relativa all'integrale $\int_0^t \varphi(t, \alpha, h_n)\, dt$, (*),

(*) Si dimostra che di tali funzioni $W(z)$ ne esiste sempre un numero infinito, quando le distanze fra i punti $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, non scendono mai al disotto di una lunghezza data χ, e anche più generalmente quando in ogni porzione finita del piano z non cade che un numero finito degli stessi punti.

allora se C_n è una linea che non passa per alcun punto d'infinito di $W(z)$ e ha nel suo interno i punti $a_1, a_2 \dots, a_n$, la somma dei primi n termini della stessa serie sarà uguale alla differenza $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} W(z)\,dz - \sum_1^{m_n}\gamma_r$, essendo γ_r i residui corrispondenti agli altri punti d' infinito di $W(z)$ che cadessero entro C_n: e quindi lo studio di quella serie si ridurrà allo studio di questa differenza, ec...

Questa osservazione, che può applicarsi anche al caso delle serie più generali dei §§. 57, 58 e 59, potrà talvolta riuscire utilissima.

138. Continuando ora le nostre osservazioni generali ricordiamo che nei §§. 53. e seg. noi abbiamo sempre richiesto che la funzione $\varphi(x, \alpha, h_n)$ che si aveva via via da considerare soddisfacesse alla condizione che per ogni valore diverso da zero e positivo ma comunque piccolo di ε, e per ogni valore di α fra a e b (a e b al più escl.) gli integrali $\int_0^\varepsilon \varphi(x,\alpha,h_n)dx$, $\int_{-\varepsilon}^0 \varphi(x, \alpha, h_n)dx$ al crescere indefinito di n tendessero ambedue verso una *stessa* quantità finita e diversa da zero G, indipendente da ε e *anche* da α.

Ora, quando i limiti per $n=\infty$ di questi integrali esistessero e fossero ancora indipendenti da ε ma non avessero tutte le altre particolarità ora indicate, per modo cioè che posto

$$\lim_{n=\infty}\int_0^\varepsilon \varphi(x, \alpha, h_n)dx = G(\alpha), \lim_{n=\infty}\int_{-\varepsilon}^0 \varphi(x, \alpha, h_n)\,dx = G_1(\alpha),$$

$G(\alpha)$ e $G_1(\alpha)$ fossero ancora diversi da zero, ma non soddisfacessero alle condizioni di essere uguali fra loro e indipendenti da α, allora è evidente che considerando invece della serie (1) del §. 53 le altre serie:

$$(139)\left\{\begin{aligned}&\int_a^b f(x)\,\varphi(x-\alpha,\alpha\,h_0)\,dx+\sum_1^\infty\int_a^b f(x)\,\{\varphi(x-\alpha,\alpha,h_n)-\varphi(x-\alpha,\alpha,h_{n-1})\}\,dx\\&\frac{1}{2}\left[\frac{1}{G_1(\alpha)}\int_a^\alpha+\frac{1}{G(\alpha)}\int_\alpha^b\right]f(x)\,\varphi(x-\alpha,\alpha,h_0)\,dx+\\&+\frac{1}{2}\sum_1^\infty\left[\frac{1}{G_1(\alpha)}\int_a^\alpha+\frac{1}{G(\alpha)}\int_\alpha^b\right]f(x)\,\{\varphi(x-\alpha,\alpha,h_n)-\varphi(x-\alpha,\alpha,h_{n-1})\}\,dx,\end{aligned}\right.$$

queste pei valori di α fra a e b pei quali sono soddisfatte le solite condizioni del §. 39. ec. (a e b al più escl.) avranno per somme respettivamente $G(\alpha)f(\alpha+0)+G_1(\alpha)f(\alpha-0)$ e $\frac{1}{2}\{f(\alpha+0)+f(\alpha-0)\}$; talchè la seconda di questa serie potrà ancora servire alla rappresentazione analitica della funzione data $f(x)$, ma la sua forma sarà ordinariamente differente da quella che prima si aveva.

Quando poi, senza escludere ora che una delle due funzioni $G(\alpha)$ e $G_1(\alpha)$ possa anche essere zero, si riscontri che la funzione $G(\alpha)+G_1(\alpha)$ è finita diversa da zero e atta alla integrazione fra a e b, allora cambiando nella prima delle serie precedenti $f(x)$ in $\frac{f(x)}{G(x)+G_1(x)}$, e valendosi di quanto si disse al §. 39, si vede subito che „ la serie:

$$(140)\quad \int_a^b f(x)\frac{\varphi(x-\alpha,\alpha,h_0)\,dx}{G(x)+G_1(x)}+\sum_1^\infty\int_a^b f(x)\frac{\varphi(x-\alpha,\alpha,h_n)-\varphi(x-\alpha,\alpha,h_{n-1})}{G(x)+G_1(x)}dx$$

„ pei punti α fra a e b nei quali $f(x)$ e $G(x)+G_1(x)$ soddisfano „ alle solite condizioni del §. 39 ec. (*) avrà per somma

(*) Propriamente, volendo valersi di quanto si disse nel §. 39, bisognerebbe richiedere che le indicate condizioni, invece che per la funzione $G(x)+G_1(x)$, fossero soddisfatte per la sua inversa $\frac{1}{G(x)+G_1(x)}$; ma coi ragionamenti del medesimo §. 39 si trova che quando quelle condizioni sono soddisfatte per una funzione $F(x)$, esse lo sono anche per la sua inversa pei punti negli intorni dei quali essa è diversa da

„ $\frac{G(\alpha)f(\alpha+0)}{G(\alpha+0)+G_1(\alpha+0)}+\frac{G_1(\alpha)f(\alpha-0)}{G(\alpha-0)+G_1(\alpha-0)}$, e quindi essa darà
„ ancora lo sviluppo di $f(x)$ in tutti i punti α nei quali $f(x)$,
„ $G(x)$, e $G_1(x)$ sono continue, e $f(x)$ e $G(x)+G_1(x)$ soddisfano
„ alle condizioni ora ricordate del §. 39 ec. „; e si può notare che la serie scritta ora non è altro che una serie più generale della (1) del §. 53 che si riduce alla (1) stessa nel caso particolare di $G_1=G=\text{cost}$; e si ottiene da questa sopprimendo il divisore 2G fuori dei segni integrali e cambiando la funzione $\varphi(x-\alpha,\alpha,h_n)$ nell'altra $\frac{\varphi(x-\alpha,\alpha,h_n)}{G(x)+G_1(x)}$.

Questa serie (140) sarà quella di cui più spesso ci varremo negli studii generali che faremo in seguito; e per questo troviamo utile anche il notare che, per le osservazioni del §. 41, il teorema ora enunciato intorno alla serie (140) vale anche quando $G(x)+G_1(x)$ diventi zero in un gruppo di punti finito, o infinito ma di prima specie fra a e b, purchè questi punti di zero di $G(x)+G_1(x)$ non combinino coi punti d'infinito che potrebbe avere la $f(x)$, e purchè la funzione $\frac{1}{G(x)+G_1(x)}$ resti atta alla integrazione fra a e b anche ridotta ai valori assoluti.

Del resto poi se le funzioni $G(x)$ e $G_1(x)$ saranno ambedue finite e diverse da zero e atte alla integrazione fra a e b, allora quand'anche sia $G(x)+G_1(x)=0$, oltre a valersi della seconda delle due serie (139), e anche, ove ne sia il caso, della serie (140), potremo valerci altresì dell'altra:

$$\frac{1}{2}\int_a^\alpha \frac{f(x)}{G_1(x)}\varphi(x-\alpha,\alpha,h_0)\,dx+\frac{1}{2}\int_\alpha^b \frac{f(x)}{G(x)}\varphi(x-\alpha,\alpha,h_0)\,dx+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_1^\infty\left[\int_a^\alpha \frac{f(x)}{G_1(x)}+\int_\alpha^b \frac{f(x)}{G(x)}\right]\{\varphi(x-\alpha,\alpha,h_n)-\varphi(x-\alpha,\alpha,h_{n-1})\}\,dx.$$

139. Passando dunque al caso particolare delle serie del

zero; e quindi i risultati ivi ottenuti pel caso del prodotto di due funzioni valgono anche pel caso del loro quoziente finchè questo è finito, ec.

§. 58, noi possiamo notare che, se si troverà che la somma della serie (7) per t positiva è $G(\alpha)$, e per t negativo è $-G_1(\alpha)$, e tutte le altre condizioni saranno soddisfatte, la serie:

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x-\alpha,\alpha,h_0)dx+\sum_1^\infty \left\{ P_{n,1}H_{n,1}(\alpha)+P_{n,2}H_{n,2}(\alpha)+\ldots+P_{n,m}H_{n,m}(\alpha) \right\},$$

ove:

$$P_{n,s}=p_{n,s}\int_a^b f(x)\,F(x)\,H_{n,s}(x)\,dx,$$

considerata pei soliti punti α fra a e b avrà per somma $G(\alpha)f(\alpha+0)+G_1(\alpha)f(\alpha-0)$; e se $G(x)+G_1(x)$ per x compreso fra a e b non è uguale a zero o lo è soltanto in un gruppo di punti di prima specie come si disse sopra, la serie:

$$(140)\quad \int_a^b f(x)\frac{\varphi(x-\alpha,\alpha,h_0)}{G(x)+G_1(x)}dx+\sum_1^\infty \left\{ P_{n,1}H_{n,1}(\alpha)+P_{n,2}H_{n,2}(\alpha)+\ldots+P_{n,m}H_{n,m}(\alpha) \right\},$$

ove:

$$P_{n,s}=p_{n,s}\int_a^b f(x)\,\frac{F(x)}{G(x)+G_1(x)}\,H_{n,s}(x)\,dx,$$

avrà per somma $\dfrac{G(\alpha)\,f(\alpha+0)}{G(\alpha+0)+G_1(\alpha+0)}+\dfrac{G_1(\alpha)\,f(\alpha-0)}{G(\alpha-0)+G_1(\alpha-0)}$ nei punti α nei quali $f(x)$ e $G(x)+G_1(x)$ soddisfano alle solite condizioni del §. 39 ec.; talchè evidentemente si può ora affermare che quando, prese date funzioni $F(x)$ e $\varphi(x-\alpha\,,\,\alpha\,,h_0)$, le somme G e $-G_1$ della serie (7) per t diverso da zero e positivo, e per t diverso da zero e negativo vengano indipendenti da t ma non soddisfino alla condizione di essere diverse da zero e uguali e di segno contrario e indipendenti da α, allora, se esse avranno una discontinuità per $t=0$ (per modo cioè che non sia $G=-G_1$), cambiando nella serie (9) le funzioni $\varphi(x-\alpha,\alpha,h_0)$

e $F(x)$ nelle altre $\frac{\varphi(x-\alpha, \alpha, h_0)}{G(x)+G_1(x)}$ e $\frac{F(x)}{G(x)+G_1(x)}$, e sopprimendo il divisore 2G fuori dei segni integrali, si passerà ad un altra serie (140) della stessa forma che pei soliti punti α suindicati avrà per somma $\frac{G(\alpha)\,f(\alpha+0)}{G(\alpha+0)+G_1(\alpha+0)}+\frac{G_1(\alpha)\,f(\alpha-0)}{G(\alpha-0)+G_1(\alpha-0)}$, e che in conseguenza rappresenterà la funzione data $f(x)$ in tutti quelli fra questi punti α nei quali $f(x)$, $G(x)$, e $G_1(x)$ sono finite e continue.

140. Fermandosi dunque più specialmente al caso delle serie (139) o (140), ne segue anche più in particolare, che se nell' applicare il teorema del §. 64. si troverà che la differenza (35) ha per limite per $n=\infty$ una funzione $\chi(\alpha,t)$ che ha una discontinuità ordinaria per $t=0$, ma senza che $\chi(\alpha,+0)$ e $\chi(\alpha,-0)$ soddisfino alla condizione di essere diversi da zero uguali fra loro e di segno contrario, e indipendenti da α, allora il teorema stesso verrà subito applicabile quando si sopprima il divisore 2G che comparisce nei termini delle serie (33) corrispondente, e alle funzioni $\frac{\partial\chi}{\partial t}$, e $F(x)$ si sostituiscano le altre $\frac{\frac{\partial\chi}{\partial t}}{\chi(x,+0)-\chi(x,-0)}$, $\frac{F(x)}{\chi(x,+0)-\chi(x,-0)}$, senza che vengano cambiati i coefficienti $p_{n,s}$, e solo intendendo che nei punti interni α di continuità di $f(x)$, e di $\chi(x,+0)$ e $\chi(x,-0)$, la somma della serie corrispondente sia appunto $f(x)$ e in quelli delle discontinuità ordinarie sia

$$\frac{\chi(\alpha,+0)f(\alpha+0)}{\chi(\alpha+0,+0)-\chi(\alpha+0,-0)}-\frac{\chi(\alpha,-0)\,f(\alpha-0)}{\chi(\alpha-0,+0)-\chi(\alpha-0,-0)};$$

supposto, ben inteso, che si tratti di punti α pei quali sono soddisfatte le solite condizioni del §. 39, e intendendo che per es. $\chi(\alpha+0,+0)$ sia il limite di $\chi(x,+0)$ per $x=\alpha+0$, ec....

141. E se nell' applicare i teoremi dei §§. 68 o 69, si troverà che le differenze (40) o (42) non hanno per limite $+\frac{1}{2}$ o $-\frac{1}{2}$ secondochè t è positivo o negativo, ma, esistendo

ancora questi limiti e avendo una discontinuità per $t=0$, sono invece uguali a $G(\alpha)$ e $-G_1(\alpha)$, allora perchè i teoremi continuino ancora a sussistere basterà cambiare la funzione $\varphi(x-\alpha,\alpha,h_n)$ corrispondente, ponendo $\frac{F(x)}{G(x)+G_1(x)}$ invece di $F(x)$ negli integrali che compariscono al numeratore dei coefficienti $q_{n,s}$ della serie che serve a rappresentare la funzione data $f(x)$, dimodochè questa serie conserverà ancora la forma:

$$(141) \qquad \sum_1^\infty \left\{ q_{n,1} H_1(\lambda_n,\alpha) + q_{n,2} H_2(\lambda_n,\alpha) + \ldots + q_{n,m} H_m(\lambda_n,\alpha) \right\},$$

essendo però ora:

$$q_{n,s} = \frac{\int_a^b f(x) \frac{F(x)}{G(x)+G_1(x)} H_s(\lambda_n,x)dx}{\int_a^b F(x) H^2_s(\lambda_n,x)dx},$$

e la sua somma pei punti α nei quali $f(x)$ e $G(x)+G_1(x)$ soddisfano alle solite condizioni del §. 39, ec. sarà $\frac{G(\alpha)f(\alpha+0)}{G(\alpha+0)+G_1(\alpha+0)} + \frac{G_1(\alpha)f(\alpha-0)}{G(\alpha-0)+G_1(\alpha-0)}$, e si ridurrà a $f(x)$ per quei punti α nei quali le funzioni stesse $f(x)$, $G(x)$ e $G_1(x)$ sono continue; talchè per tutti gli indicati punti α si potrà scrivere:

$$\frac{G(\alpha)}{G(\alpha+0)+G_1(\alpha+0)} f(\alpha+0) + \frac{G_1(\alpha)}{G(\alpha-0)+G_1(\alpha-0)} f(\alpha-0) =$$

$$= \sum_1^\infty \left\{ q_{n,1} H_1(\lambda_n,\alpha) + q_{n,2} H_2(\lambda_n,\alpha) + \ldots + q_{n,m} H_m((\lambda_n,\alpha) \right\},$$

ove le $q_{n,s}$ sono date dalla formola precedente.

142. Quì però è da osservare che se dei valori α pei quali questa formola è applicabile ve ne ha in ogni porzione dell'intervallo (a, b), e se alla serie del secondo membro è applicabile termine a termine la integrazione definita fra a e b

(il che, come mostreremo in seguito, accade ordinariamente), allora cambiando α in x e moltiplicando per $F(x) H_s(\lambda_n, x)$ i due membri di questa formola e poi formando la serie degli integrali fra a e b, questa serie rappresenterà l' integrale della somma. Ora la serie degli integrali, tenuto conto dei valori attuali di $q_{n,s}$, si riduce a $\int_a^b f(x) \frac{F(x)}{G(x)+G_1(x)} H_s(\lambda_n, x) dx$, mentre per l'integrale della somma può prendersi $\int_a^b f(x) F(x) H_s(\lambda_n, x) dx$, giacchè evidentemente la funzione $f(x)$ differisce dall' altra $\frac{G(x)}{G(x)+G_1(x)} f(x+0) + \frac{G_1(x)}{G(x)+G_1(x)} f(x-0)$, e quindi anche da $\frac{G(x)}{G(x+0)+G_1(x+0)} f(x+0) + \frac{G_1(x)}{G(x-0)+G_1(x-0)} f(x-0)$ soltanto per funzioni d' integrale nullo; dunque dovrà essere:

$$\int_a^b f(x) F(x) \left\{ \frac{1}{G(x)+G_1(x)} - 1 \right\} H_s(\lambda_n, x) \, dx = 0 .$$

Questo evidentemente porta che $G(x)+G_1(x)$ debba essere sempre uguale ad uno all' infuori di una funzione d' integrale nullo, perchè altrimenti profittando della tanta arbitrarietà che è in $f(x)$ si potrebbe fare in modo che l' ultima eguaglianza non fosse soddisfatta; dunque nel caso attuale la funzione $G(x)+G_1(x)$ dovrà prendere il valore uno in punti di qualunque porzione dell' intervallo (a, b), e se essa è continua fra a e b dovremo avere sempre $G(x)+G_1(x)=1$; di modo che allora la somma della serie (141) in tutti i punti x fra a e b pei quali $f(x)$ soddisfa a una delle condizioni del §. 39. ec. sarà $G(x) f(x+0) + G_1(x) f(x-0)$, o $\frac{1}{2} \{ f(x+0) + f(x-0) \} + \left(G - \frac{1}{2}\right) \{ f(x+0) - f(x-0) \}$.

Questa osservazione vale anche pel caso delle serie generali considerate nel §. 59.

142. In correlazione colle precedenti osservazione generali intorno alle variazioni che possono farsi sulle funzioni $\varphi(x-\alpha,\alpha,h_n)$, giova ora notare che se nei teoremi di questo capitolo la funzione via via indicata con $F(x)$ si muta in un altra $F_1(x)$, e al tempo stesso la funzione indicata con $\varphi(x-\alpha, \alpha, h_0)$ si muta in $\varphi(x-\alpha, \alpha, h_0)\frac{F_1(x)}{F(x)}$, allora la funzione corrispondente $\varphi(x-\alpha, \alpha, h_n)$ risulterà moltiplicata per $\frac{F_1(x)}{F(x)}$; e quindi se, essendo α un punto *interno* all'intervallo (a, b) che via via si aveva da considerare, colla primitiva funzione $\varphi(x-\alpha, \alpha, h_n)$ si trovava $\lim_{n=\infty}\int_{a'}^{b'}\varphi(x-\alpha,\alpha,h_n)\,dx=G(\alpha)+G_1(\alpha)$ quando i limiti a', b' dell'integrale comprendevano il punto α per modo che fosse $a'<\alpha<b'$, si vede subito che colla nuova funzione:

$$\varphi_1(x-\alpha,\alpha,h_n)=\varphi(x-\alpha,\alpha,h_n)\frac{F_1(x)}{F(\alpha)}=\varphi(x-\alpha, \alpha, h_n)\frac{F_1(x-\alpha+\alpha)}{F(x-\alpha+\alpha)}$$

si troverà ordinariamente:

$$\lim_{n=\infty}\int_{a'}^{b'}\varphi_1(x-\alpha, \alpha, h_n)\, d\, x=\frac{F_1(\alpha+0)}{F(\alpha+0)}G(\alpha)+\frac{F_1(\alpha-0)}{F(\alpha-0)}G_1(\alpha)\text{; ec.}$$

talchè questa funzione $\varphi_1(x-\alpha, \alpha, h_n)$ figurerà ordinariamente come l' antica, a meno che nell'intervallo d' integrazione (a',b') la funzione $\frac{F_1(x)}{F(x)}$ non presenti qualche singolarità, come ad esempio quella di divenire infinita o di avere infinite oscillazioni senza soddisfare ad alcune delle condizioni che si hanno nel teorema del §. 39.

Per questo adunque, quando la funzione $F(x)$ che figura nei nostri sviluppi non sia anticipatamente conosciuta, si potrà ordinariamente partire da una funzione ausiliaria qualsiasi $F_1(x)$, salvo ad aver poi riguardo alle singolarità che la scelta particolare che si fosse fatta di questa funzione potrebbe por-

tare quando, con valersi delle considerazioni fatte ora o di quelle del paragrafo precedente, si volesse passare ad un altra funzione $F(x)$ per la quale le corrispondenti $G(\alpha)$ e $G_1(\alpha)$ soddisfacessero a condizioni speciali, come ad esempio a quella di essere diverse da zero, e indipendenti da α.

143. Le osservazioni che abbiamo fatte estendono già grandemente i risultati ottenuti nei primi paragrafi di questo capitolo; ma questi risultati possono venire estesi anche ulteriormente.

Si noti perciò che se è data una funzione $\theta(t, \alpha, h_n)$ che, considerata per un valore speciale (ma qualunque) di α in un certo intervallo (a, b) (gli estremi al più escl.), gode della proprietà che per t compreso fra $a-\alpha$ e $b-\alpha$ e discosto da zero più di ε (ε diverso da zero e positivo ma arbitrariamente piccolo) è sempre numericamente inferiore a un numero finito (variabile con ε) qualunque sia n, e lo stesso accade per l' integrale $\int_0^t \theta(t, \alpha, h_n)\,dt$ anche quando t si accosta indefinitamente a zero; e se di più per $n=\infty$ questo integrale, considerato per ogni valore di t diverso da zero e compreso fra $a-\alpha$ e $b-\alpha$, ha un limite determinato e finito $\chi(\alpha, t)$ che, come funzione di t, fuori del punto $t=0$ è anche continuo e ammette una derivata parziale $\frac{\partial \chi}{\partial t}$ finita e atta all'integrazione anche fra $a-\alpha$ e $b-\alpha$, allora $\chi(-\alpha, +0)$ e $\chi(\alpha, +0)$ avranno certamente un significato determinato, e si avrà $\lim_{n=\infty} \int_0^t \left\{ \theta(t, \alpha, h_n) - \frac{\partial \chi}{\partial t} \right\} dt = \chi(\alpha, +0)$ per t positivo e $\lim_{n=\infty} \int_0^t \left\{ \theta(t, \alpha, h_n) - \frac{\partial \chi}{\partial t} \right\} dt = \chi(\alpha, -0)$ per t negativo, per modo che si potrà intanto esser certi che, considerata per ogni valore speciale di α fra a e b (a e b al più escl.), la funzione $\theta(t, \alpha, h_n) - \frac{\partial \chi}{\partial t}$ figurerà come una delle funzioni $\varphi(x, h)$ del cap. III.

Ne segue evidentemente che se la funzione $\theta(t,\alpha,h_n)$, oltre ad avere le indicate proprietà, gode anche dell'altra che, considerata per ogni valore speciale (ma qualunque) di α fra a e b, tranne tutt' al più pei punti estremi a e b e per un gruppo di punti finito o infinito ma di prima specie fra a e b, la funzione $\chi(\alpha,t)$, come funzione di t fra $a-\alpha$ e $b-\alpha$, ammette sempre una discontinuità (che sarà necessariamente ordinaria) per $t=0$, allora la indicata funzione $\theta(t,\alpha,h_n)$ condurrà sempre a una rappresentazione analitica delle funzioni $f(x)$ che fra a e b sono atte alla integrazione insieme alla funzione $\frac{f(x)}{\chi(x,+0)-\chi(x,-0)}$, e questa rappresentazione analitica varrà pei soliti punti α fra a e b pei quali sono soddisfatte le condizioni del §. 39, e sarà della forma:

$$\int_a^b f(x)\frac{\theta(x-\alpha,\alpha,h_0)-\frac{\partial}{\partial x}\chi(\alpha,x-\alpha)}{\chi(x,+0)-\chi(x,-0)}dx+\sum_1^\infty\int_a^b f(x)\frac{\theta(x-\alpha,\alpha,h_n)-\theta(x-\alpha,\alpha,h_{n-1})}{\chi(x,+0)-\chi(x,-0)}$$

Questa osservazione generale, di cui in sostanza già facemmo una speciale applicazione pel teorema del §. 64, ci sembra di importanza grandissima, poichè, preso arbitrariamente uno sviluppo e formata la funzione $\theta(t,\alpha,h_n)$ corrispondente col fare la somma dei primi n termini dello sviluppo ec., le condizioni poste sopra, all' infuori di quella relativa alla discontinuità di $\chi(\alpha,t)$ per $t=0$, saranno ordinariamente soddisfatte; e quindi basterà ordinariamente limitarsi a verificare se questa condizione sulla discontinuità di $\chi(\alpha,t)$ è o nò soddisfatta per decidere se il dato sviluppo di $f(x)$, o quello che se ne deduce coll' aggiungere un divisore $\chi(x+0)-\chi(x+0)$ sotto gli integrali dei varii termini ec. è o nò possibile, quando questa funzione $f(x)$ soddisfa a una delle condizioni del §. 39 ec.

144. Ed è degno di nota che anche con questi processi generalissimi gli studî per la ricerca della possibilità di sviluppi di forma data per le funzioni in un certo intervallo (a,b), quando nei termini di questi sviluppi la funzione $f(x)$ figura

soltanto a moltiplicatore sotto un integrale che è esteso fra a e b, si riducono sempre a uno studio che dipende soltanto dalla forma dello sviluppo, senza dipendere affatto dalla natura della funzione $f(x)$ da svilupparsi, e a uno studio che è relativo a questa funzione e che si fà colle considerazioni generali del cap. III.

E così per esempio, se si tratterà di sviluppi della forma $\sum_1^\infty A_n H_n(\alpha)$ ove $A_n = \int_a^b f(x) K_n(x)\,dx$, il primo di questi studii si ridurrà sempre a esaminare la serie $\sum_1^\infty H_n(\alpha)\int_0^t K_n(\alpha+t)\,dt$ (che risulta da quella data $\sum_1^\infty A_n H_n(\alpha)$ sopprimendo sotto l'integrale che figura in A_n la funzione $f(x)$, e cangiandovi x in $\alpha+t$, e i limiti a e b in 0 e t), e ad esaminare al tempo stesso la somma $\sum_1^n H_n(\alpha)\int_0^t K_n(\alpha+t)\,dt$ dei primi n termini di questa serie insieme alla sua derivata $\sum_1^n H_n(\alpha) K_n(\alpha+t)$, onde vedere se queste tre quantità possano o nò considerarsi respettivamente come quantità $\chi(\alpha, t)$, $\int_0^t \theta(t, \alpha, h_n)\,dt$, $\theta(t, \alpha, h_n)$ dotate delle proprietà dette sopra. E quando queste particolarità si trovino verificate, allora si potrà affermare che la serie $A(\alpha) + \sum_1^\infty A'_n H_n(\alpha)$, ove

$$A'(\alpha) = -\int_a^b f(x)\frac{\frac{\partial}{\partial x}\chi(\alpha, x-\alpha)}{\chi(x,+0)-\chi(x,-0)}dx,\quad A_n = \int_a^b f(x)\frac{K_n(x)}{\chi(x,+0)-\chi(x,-0)}dx$$

rappresenta $f(\alpha)$ per tutti quei punti α fra a e b pei quali si troverà che $f(x)$, $\chi(x,+0)$ e $\chi(x-0)$ sono finiti e continui,

e $f(x)$, e $\chi(x,+0)-\chi(x,+0$ soddisfano a una delle condizioni del §. 39. ec.

Così pure, trattando per es. degli sviluppi dei §§. 57 o 58, si esaminerà prima se la serie (6) o (7), ove sia soppresso il termine $\int_0^t \varphi(t, \alpha, h_0)\, dt$, e le funzioni $K_{n,s}(x)$, o i coefficienti $p_{n,s}$ e la funzione $F(x)$ siano presi nel modo che si crede meglio, è o nò convergente, e se la sua somma può o nò considerarsi come una delle funzioni $\chi(\alpha, t)$ quì indicate, per le quali $\chi(\alpha, -0)$, e $\chi(\alpha, +0)$ sono differenti fra loro, ec.; e nel caso affermativo, se (come ordinariamente accadrà) si troverà anche che qualunque sia n la somma dei primi n termini di questa serie, per ogni valore di t fra $a-\alpha$ e $b-\alpha$, e le somme (5) o (8), ove sia tralasciato il termine $\varphi(t, \alpha, h_0)$, pei valori di t discosti da zero più di ε ma compresi sempre fra questi limiti $a-\alpha$ e $b-\alpha$ sono sempre numericamente inferiori a un numero finito, allora si concluderà senz' altro che gli sviluppi (3) o (9) sono applicabili alla funzione $f(x)$ nei soliti casi del Cap. III, quando si prenda $\varphi(x-\alpha, \alpha, h_0) = -\frac{\partial}{\partial x}\chi(\alpha, x-\alpha)$, e si cangi $F(x)$ in $\frac{F(x)}{\chi(x,+0)-\chi(x,-0)}$ ec. . . .

Questi sviluppi però, per la presenza del primo termine, non soddisfaranno spesso alla condizione di essere rappresentazioni di *forma data* della funzione $f(x)$; ma ciò non toglie che essi possano avere una importanza grandissima, in quanto possono servire a dare per tutti punti di un certo intervallo (a, b) una *unica* rappresentazione analitica di una funzione $f(x)$ che sia data arbitrariamente in quell' intervallo (a, b).

Nè si deve tralasciare di notare che in certi casi le indicate verificazioni potranno riuscire decisive soltanto quando i termini della serie che si considera vengano presi o aggruppati in un modo determinato, e allora la validità dello sviluppo potrà assicurarsi soltanto quando i suoi termini si ordinino o si aggruppino in quel dato modo.

Di questa osservazione del resto noi ci valemmo già per gli sviluppi trigonometrici dei §§. 81 e seg.; e può dirsi che ce ne siamo valsi tacitamente anche per quelli in funzioni Jacobiane dei §§. 118 e seg., giacchè da tutto il processo ivi seguito apparisce che i termini di tutti questi sviluppi s' intendono sempre aggruppati due a due, riunendo quelli corrispondenti alle radici conjugate λ_n o λ'_n, e poi s' intendono presi questi gruppi nell' ordine naturale secondo cui crescono i moduli di queste quantità λ_n o λ'_n.

145. Aggiungiamo inoltre che se (come appunto avviene sempre nei casi particolari da noi studiati) la funzione $\varphi(x-\alpha, \alpha, h_n)$ che si ha da considerare è della forma $F(x)\psi(x, \alpha, h_n)$, ove $\psi(x, \alpha, h_n)$ è simmetrica rispetto ad x ed a α, e $F(x)$ è senza infinite oscillazioni, ed è finita continua e diversa da zero per tutto tranne tutt' al più in punti eccezionali, allora, avendosi:

$$\int \varphi(x-\alpha,\alpha,h_n)d\alpha = \int \frac{F(x)}{F(\alpha)} F(\alpha)\psi(x,\alpha,h_n)d\alpha = F(x)\int \frac{1}{F(\alpha)}\varphi(\alpha-x,x,h_n)d\alpha,$$

si vede chiaro che se in questi casi, quando α non è un estremo del solito intervallo (a, b) ed è un punto *interno* dell'intervallo (a', b'), si ha $\lim_{n=\infty}\int_{a'}^{b'} \varphi(x-\alpha, \alpha, h_n)\, dx = G(\alpha) + G_1(\alpha)$, si avrà anche $\lim_{n=\infty}\int_{a'}^{b'} \varphi(x-\alpha, \alpha, h_n)\, d\alpha = G(x) + G_1(x)$ tutte le volte che l'intervallo d'integrazione, che ora deve avere nel suo interno il punto x, non comprende punti α nei quali $F(\alpha)$ presenti qualche singolarità.

Similmente se x è per es. l'estremo inferiore a' dell'integrale, e $b' > x$, si trova che insieme a $\lim_{n=\infty}\int_{x}^{b'} \varphi(\alpha-x, x, h_n)d\alpha = G(x)$ si ha anche $\lim_{n=\infty}\int_{x}^{b'} \varphi(x-\alpha, \alpha, h_n)\, d\alpha = G(x)$; e se x è esterno all'in-

tervallo (a',b'), si trova che insieme a $\lim_{n=\infty}\int_{a'}^{b'}\varphi(\alpha-x\,,x\,,h_n)d\alpha=0$,

si ha $\lim_{n=\infty}\int_{a'}^{b'}\varphi(x-\alpha\,,\alpha\,,h_n)\,d\,\alpha=0$, ec.

146. Del resto poi è facile vedere in generale che se (come ordinariamente accade) $\varphi(x-\alpha\,,\alpha\,,h_n)$ considerata come funzione delle due variabili x e α è finita e continua in un campo ove queste variabili possono prendere tutti i valori da a a b, o almeno, più generalmente, è tale che per $a\leq c<d\leq b$ le due integrazioni nell' integrale doppio $\int_c^d d\alpha\int_c^d\varphi(x,\alpha,\alpha,h_n)dx$ possono invertirsi, allora quando si trovi che per un dato intervallo d' integrazione (a', b') che è tutto o parte di (a, b), si ha $\lim_{n=\infty}\int_{a'}^{b'}\varphi(x-\alpha\,,\alpha\,,h_n)\,d\,x=G(\alpha)+G_1(\alpha)$,

e $\lim_{n=\infty}\int_{a'}^{b'}\varphi(x-\alpha\,,\alpha\,,h_n)\,d\,\alpha=H(x)+H_1(x)$, le due funzioni $G(x)+G_1(x)$ e $H(x)+H_1(x)$, supposte atte alla integrazione, o saranno uguali fra loro in ogni punto di (a', b'), come nel caso precedente, o tutt'al più differiranno fra loro soltanto per una funzione d'integrale nullo; e ciò tutte le volte che, considerati per ogni valore speciale di n separatamente, gli integrali precedenti siano finiti per ogni valore di α o di x nell' intervallo d' integrazione, e al tempo stesso in ogni porzione comunque piccola dell'intervallo (a', b'), o $(a'+\varepsilon, b'-\varepsilon)$ (ε diverso da zero e positivo ma arbitrariamente piccolo) vi siano dei punti x o α pei quali al crescere indefinito di n gli integrali medesimi convergono in ugual grado verso i loro limiti respettivi $G(\alpha)+G_1(\alpha)$, $H(x)+H_1(x)$.

Prendasi infatti una porzione qualsiasi (a_1, b_1) dell'intervallo (a', b'), e considerando l' integrale doppio $\int_{a_1}^{b_1}d\,\alpha\int_{a_1}^{b_1}\varphi(x-\alpha\,,\alpha\,,h_n)\,d\,x$, si indichi con $\psi_{n,\alpha}$ l' integrale

$\int_{a_1}^{b_1} \varphi(x-\alpha, \alpha, h_n)\, dx$, e si osservi che, per le nostre ipotesi, in ogni porzione dell' intervallo $(a_1+\varepsilon, b_1-\varepsilon)$ esisteranno dei punti α pei quali l'integrale $\psi_{n,\alpha}$ considerato per qualsiasi valore di n superiore a un certo numero finito n_0 differisce da $G(\alpha)+G_1(\alpha)$ meno di un numero piccolo a piacere σ. Prendendo allora un valore qualunque di n superiore a n_0, e immaginando scomposto l' intervallo $(a_1+\varepsilon, b_1-\varepsilon)$ in un numero finito d'intervalli parziali $\delta_1, \delta_2, .., \delta_p$, potremo sempre trovare in questi intervalli dei punti $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_p$ pei quali la indicata condizione sia soddisfatta; e basterà che questi intervalli sieno presi abbastanza piccoli perchè si possa anche affermare che l'integrale $\int_{a_1+\varepsilon}^{b_1-\varepsilon} \psi_{n,\alpha}\, d\alpha$ differisce dalla somma $\sum_1^p \delta_s \psi_{n,\alpha_s}$ e quindi anche dall'altra $\sum_1^p \delta_s [G(\alpha_s)+G_1(\alpha_s)]$ meno di quel numero che più ci piace σ'.

Ma evidentemente, se le $\delta_1, \delta_2, .., \delta_p$ sono abbastanza piccole, l'ultima somma differisce tanto poco quanto si vuole dall'integrale $\int_{a_1+\varepsilon}^{b_1-\varepsilon} [G(\alpha)+G_1(\alpha)]d\alpha$; e d'altra parte, se ε è sufficientemente prossimo a zero, questo e l'altro integrale $\int_{a_1+\varepsilon}^{b_1-\varepsilon} \psi_{n,\alpha}\, d\alpha$, differiscono tanto poco quanto si vuole dai due $\int_{a_1}^{b_1} [G(\alpha)+G_1(\alpha)]d\alpha$, $\int_{a_1}^{b_1} \psi_{n,\alpha}\, d\alpha$; dunque, poichè l' ultimo integrale non è altro che l'integrale doppio $\int_{a_1}^{b_1} d\alpha \int_{a_1}^{b_1} \varphi(x-\alpha, \alpha, h_n)\, dx$, si può asserire intanto che il limite per $n=\infty$ di questo integrale doppio esiste ed è l'integrale semplice $\int_{a_1}^{b_1} [G(\alpha)+G_1(\alpha)]\, d\alpha$.

D' altra parte, invertendo le integrazioni, si trova anche che lo stesso integrale doppio ha per limite l'integrale semplice $\int_{a_1}^{b_1} [H(x) + H_1(x)]\, d\, x$; dunque sarà evidentemente:

$$\int_{a_1}^{b_1} [G(x) + G_1(x)]\, d\, x = \int_{a_1}^{b_1} [H(x) + H_1(x)]\, d\, x,$$

qualunque sia la porzione che si considera (a_1, b_1) di (a', b'), e questo dimostra appunto quanto enunciammo sopra.

Questo risultato si estende subito anche al caso in cui alcune delle varie condizioni poste sopra non si trovino soddisfatte fra a' e b' altro che negli intervalli che restano dopo di avere escluso con intorni arbitrariamente piccoli un gruppo finito o infinito di punti di prima specie; bastando per fare questa estensione l' applicare i soliti processi con considerare successivamente il caso dei gruppi di punti di prima specie e degli ordini 0, 1^0, 2^0, 3^0, . . , $\nu-1$, ν, ec.

FINE DELLA PRIMA PARTE

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE IN QUESTA PRIMA PARTE